Q
56
S7

UNIVERSITAIRE

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-DEUXIÈME, 1948

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER FASCICULE

3 MARS 1948

Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1948

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 35 frs

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

Session du 29 janvier 1948, à Bruxelles 5

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques** . 5

Sur l'intégration par approximations successives de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par M. R. H. J. Germay 5

Remarques sur les fonctions orthogonales à toute fonction harmonique dans un domaine plan, à propos des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible, par M. J. Kampé de Fériet 11

Sur les hauteurs du tétraèdre, par M. V. Thébault 19

Sur une propriété d'une équation intégrale, par M. M. Parodi 24

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques** 27

La récession des nébuleuses extra-galactiques (2e partie), par M. P. Drumaux 27

Sur le calcul des véhicules redresseurs à deux lentilles identiques, par M. A. Biot 36

Séparation par une onde sonore des constituants d'un mélange de gaz de masses différentes, par M. Ph. Passau 40

Phénomènes d'adsorption dans les solutions colloïdales, par M. A. Boutaric et Melle S. Fabry 47

Azéotropes binaires orthobares que forment des oxydes avec des hydrocarbures, par M. M. Lecat 55

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg	70 fr.
dans les autres pays	120 fr.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

Nulla unquam inter fidem et rationem
vera dissensio esse potest.
CONST. DE FIDE CATH., C. IV.

TOME SOIXANTE-DEUXIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1948

SESSION DU 29 JANVIER 1948
A BRUXELLES

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur l'intégration par approximations successives de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes

PAR

R. H. GERMAY

Professeur à l'Université de Liége

§ 1. Considérons le système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes x, y et à p fonctions inconnues $z_1, z_2 \ldots z_p$,

$$(1)\quad \frac{\delta^2 z_j}{\delta x\,\delta y} = \lambda\left[\sum_{\kappa=1}^{\kappa=p}\left\{a_{j\kappa}(x,y)\frac{\delta z_\kappa}{\delta x} + b_{j\kappa}(x,y)\frac{\delta z_\kappa}{\delta y} + c_{j\kappa}(x,y)\,z_\kappa(x,y)\right\}\right] + f_j(x,y)\quad,\quad (j=1,2\ldots p).$$

λ désigne un paramètre variable ; les fonctions $a_{j\kappa}$, $b_{j\kappa}$, $c_{j\kappa}$, f_j sont définies et continues dans le rectangle (R) limité par les droites

$$(2)\qquad x=0,\quad x=\alpha,\quad y=0,\quad y=\beta,\quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

Nous avons antérieurement étendu aux systèmes de la forme (1) la notion de fonction de Riemann associée à l'équation aux dérivées partielles du second ordre, de forme linéaire et du type hyperbolique

$$(3)\quad \frac{\delta^2 z}{\delta x\,\delta y} = \lambda\left[a(x,y)\frac{\delta z}{\delta x} + b(x,y)\frac{\delta z}{\delta y} + c(x,y)\,z(x,y)\right] + f(x,y).$$

Nous avons suivi la méthode d'approximations successives de E. Picard reprise par E. Goursat dans son Cours d'Analyse (1) et démontré l'existence de p^2 fonctions $\mathbf{G}_{js}(x, y ; \xi, \eta ; \lambda)$, $(j, s = 1, 2, .. p)$ auxquelles nous avons aussi donné le nom de fonctions de Riemann (2).

Les intégrales $\mathbf{Z}_j(x, y ; \lambda)$, $(j = 1, \ldots p)$ du système (1) s'annulant pour $x = 0$ quelle que soit la valeur de y et pour $y = 0$ quelle que soit celle de x, s'écrivent sous la forme

$$(4) \quad \mathbf{Z}_j(x, y ; \lambda) = \sum_{s=1}^{s=p} \left\{ \int_0^x d\xi \int_0^y f_s(\xi, \eta)\, \mathbf{G}_{js}(x, y ; \xi, \eta ; \lambda)\, d\eta \right\},$$

$$(j = 1, 2, \ldots p).$$

Les p^2 fonctions de Riemann $\mathbf{G}_{js}$ sont des séries entières en λ

$$(5) \quad \mathbf{G}_{js}(x, y ; \xi, \eta ; \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda^n\, g_{js}^{(n)}(x, y ; \xi, \eta), \quad (j, s = 1, 2, \ldots p).$$

Les coefficients $g_{js}^{(n)}$ de ces séries se définissent de proche en proche par les formules récurrentes

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{js}^{(n)}(x, y ; \xi, \eta) \\ = \displaystyle\int_\xi^x du \int_\eta^y \left[\sum_{K=1}^{K=p} \left\{ \begin{array}{l} a_{jK}(u, v) \dfrac{\partial g_{Ks}^{(n-1)}}{\partial u}(u, v ; \xi, \eta) \\ + b_{jK}(u, v) \dfrac{\partial g_{Ks}^{(n-1)}}{\partial v}(u, v ; \xi, \eta) \\ + c_{jK}(u, v)\, g_{Ks}^{(n-1)}(u, v ; \xi, \eta) \end{array} \right\} dv \right] \\ \quad + \displaystyle\int_\eta^y \left[\sum_{K=1}^{K=p} \left\{ a_{jK}(\xi, v),\, g_{Ks}^{(n-1)}(\xi, v ; \xi, \eta) \right\} \right] dv \\ \quad + \displaystyle\int_\xi^x \left[\sum_{K=1}^{K=p} \left\{ b_{jK}(u, \eta)\, g_{Ks}^{(n-1)}(u, \eta ; \xi, \eta) \right\} \right] du, \quad (j = 1, 2, \ldots p), \end{array} \right.$$

à partir des valeurs initiales

$$g_{js}^{(o)} = 0 \text{ pour } j \neq s, \quad g_{ss}^{(o)} = 1.$$

---

(1) E. Goursat : Cours d'Analyse mathématique, t. III, 3e éd., chap. XXVI, section II, §§ 494, 495, pp. 133-141.

(2) R. H. Germay : Sur les fonctions de Riemann associées aux systèmes d'équations aux dérivées partielles et d'équations intégro-différentielles du second ordre à deux variables indépendantes (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége*, 3e série, t. XIV, 1928).

§ 2. Nous nous proposons d'imiter une méthode d'approximations successives que nous avons précédemment indiquée pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles normales (1) et de montrer que l'intégration du système (1) où l'on fait $\lambda = 1$ peut être réalisée par approximations successives en n'utilisant que les fonctions de Riemann associées à des équations telles que (3), à une seule fonction inconnue.

Construisons les suites indéfinies de fonctions

$$(7) \qquad z_{j0},\ z_{j1},\ z_{j3},\ \ldots\ z_{jp},\ z_{j,\mu+1},\ \ldots\ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots p)$$

dont les termes s'obtiennent de proche en proche de la manière suivante :

a) les fonctions $z_{11}, \ldots z_{p1}$ sont les intégrales des équations

$$(8) \qquad \frac{\delta^2 z_j}{\delta x\, \delta y} = a_{jj}(x, y)\frac{\delta z_j}{\delta x} + b_{jj}(x, y)\frac{\delta z_j}{\delta y} + c_{jj}(x, y)\, z_j(x, y) + f_j(x, y),$$
$$(j = 1, 2, \ldots p),$$

se réduisant à 0 pour $y = 0$ quelle que soit la valeur de x et pour $x = 0$ quelle que soit celle de y ;

b) les fonctions $z_{1,\mu+1}, \ldots z_{p,\mu+1}$ sont les intégrales des équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2 z_{j,\mu+1}}{\delta x\, \delta y} &= a_{j1}(x, y)\frac{\delta z_{1,\mu}}{\delta x} + b_{j1}(x, y)\frac{\delta z_{1,\mu}}{\delta y} + c_{j1}(x, y)\, z_{1,\mu}(x, y) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{j,j-1}(x, y)\frac{\delta z_{j-1,\mu}}{\delta x} + b_{j,j-1}(x, y)\frac{\delta z_{j-1,\mu}}{\delta y} + c_{j,j-1}(x, y)\, z_{j-1,\mu}(x, y) \\ &+ a_{j,j}(x, y)\frac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta x} + b_{j,j}(x, y)\frac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta y} + c_{j,j}(x, y)\, z_{j,\mu+1}(x, y) \\ &+ a_{j,j+1}(x, y)\frac{\delta z_{j+1,\mu}}{\delta x} + b_{j,j+1}(x, y)\frac{\delta z_{j+1,\mu}}{\delta y} + c_{j,j+1}(x, y)\, z_{j+1,\mu}(x, y) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{j,p}(x, y)\frac{\delta z_{p,\mu}}{\delta x} + b_{j,p}(x, y)\frac{\delta z_{p,\mu}}{\delta y} + c_{j,p}(x, y)\, z_{p,\mu}(x, y) + f_j(x, y), \end{aligned} \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots p),$$

satisfaisant aux conditions initiales indiquées ci-dessus.

---

(1) R. H. Germay : Sur une méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles normales (*Bulletin de la Soc. Royale des Sc. de Liège*, 1946, pp. 510-513).

Désignons par $\mathbf{G}_j(x, y ; \xi, \eta ; \lambda)$ la fonction de Riemann associée à l'équation

$$(10)\quad \frac{\delta^2 z_j}{\delta x\, \delta y} = \lambda \left[a_{jj}(x, y) \frac{\delta z_j}{\delta x} + b_{jj}(x, y) \frac{\delta z_j}{\delta y} + c_{jj}(x, y) z_j(x, y) \right] + f_j(x, y).$$

Cette fonction $\mathbf{G}_j(x, y ; \xi, \eta ; \lambda)$ est une série entière en λ

$$(11)\quad \mathbf{G}_j(x, y ; \xi, \eta ; \lambda) = \sum_{n=o}^{n=\infty} \lambda^n g_{j,n}(x, y ; \xi, \eta).$$

Les coefficients $g_{j,n}(x, y ; \xi, \eta)$ se définissent de proche en proche par la formule récurrente

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} g_{j,n}(x, y ; \xi, \eta) \\ = \displaystyle\int_\xi^x du \int_\eta^y \left[\begin{array}{l} a_{jj}(u, v) \dfrac{\delta g_{j,n-1}}{\delta u}(u, v ; \xi, \eta) \\ + b_{jj}(u, v) \dfrac{\delta g_{j,n-1}}{\delta v}(u, v ; \xi, \eta) \\ + c_{jj}(u, v)\, g_{j,n-1}(u, v ; \xi, \eta) \end{array} \right] dv \\ + \displaystyle\int_\xi^x b_{jj}(u, \eta)\, g_{j,n-1}(u, \eta ; \xi, \eta)\, du + \int_\eta^y a(\xi, v)\, g_{j,n-1}(\xi, v ; \xi, \eta)\, dv, \end{array} \right.$$

moyennant la valeur initiale $g_{j,o} = 1$.

Les intégrales des équations (8) satisfaisant aux conditions initiales indiquées sont données par les formules

$$(13)\quad z_{j1}(x, y) = \int_o^x d\xi \int_o^y f_j(\xi, \eta)\, \mathbf{G}_j(x, y ; \xi, \eta ; 1)\, d\eta, \quad (j = 1, 2, \ldots p).$$

Leurs dérivées partielles premières ont pour expressions respectives

$$(14)\quad \frac{\delta z_{j1}}{\delta x} = \int_o^y f_j(x, \eta) \mathbf{G}_j(x, y ; x, \eta ; 1)\, d\eta + \int_o^x d\xi \int_o^y f_j(\xi, \eta) \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x}(x, y ; \xi, \eta ; 1)\, d\eta$$

$$(15)\quad \frac{\delta z_{j1}}{\delta y} = \int_o^x f_j(\xi, y)\, \mathbf{G}_j(x, y ; \xi, y ; 1)\, d\xi + \int_o^x d\xi \int_o^y f_j(\xi, \eta) \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial y}(x, y ; \xi, \eta ; 1)\, d\eta$$

En général, les intégrales des équations (9) satisfaisant aux mêmes conditions initiales s'écrivent

$$
\begin{aligned}
&z_{j,\,\mu+1}(x,y)\\
&\Big\{ a_{j,1}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{1,\,\mu}}{\delta\xi}(\xi,\eta)+b_{j,1}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{1,\,\mu}}{\delta\eta}(\xi,\eta)+c_{j,1}(\xi,\eta)\,z_{1,\,\mu}(\xi,\eta)\\
&+\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad a_{j,j-1}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{j-1,\,\mu}}{\delta\xi}(\xi,\eta)+b_{j,\,j-1}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{j-1,\,\mu}}{\delta\eta}(\xi,\eta)+c_{j,\,j-1}(\xi,\eta)\,z_{j-1,\,\mu}(\xi,\eta)\\
&+a_{j,\,j+1}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{j+1,\,\mu}}{\delta\xi}(\xi,\eta)+b_{j,\,j+1}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{j+1,\,\mu}}{\delta\eta}(\xi,\eta)+c_{j,\,j+1}(\xi,\eta)\,z_{j+1,\,\mu}(\xi,\eta)\\
&+\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_{j,p}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{p,\,\mu}}{\delta\xi}(\xi,\eta)+b_{j,p}(\xi,\eta)\frac{\delta z_{p,\,\mu}}{\delta\eta}(\xi,\eta)+c_{j,p}(\xi,\eta)\,z_{p,\,\mu}(\xi,\eta)\\
&\qquad\qquad+f_j(\xi,\eta)\Big\}\\
&(j=1,2,\ldots p).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
=\int_o^x d\xi\int_o^y \Big\{\cdots\Big\}\,\mathbf{G}_j(x,y\,;\,\xi,\eta\,;\,1)\,d\eta,
$$

Leurs dérivées partielles premières sont données par les formules suivantes

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta x}(x,y)\\
&\left\{\begin{aligned}
&=\int_0^y\left\{\sum_{\kappa=1,\,\kappa\neq j}^{\kappa=n}\left[a_{j,\kappa}(x,\eta)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta x}(x,\eta)+b_{j,\kappa}(x,\eta)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta \eta}(x,\eta)+c_{j,\kappa}(x,\eta)\,z_{\kappa,\mu}(x,\eta)\right]\right\}\left\{\begin{matrix}\mathbf{G}_j(x,y\,;\\ x,\eta\,;1)\,d\eta\end{matrix}\right.\\
&\qquad\qquad+f_j(x,\eta)\\
&+\int_0^x d\xi\int_0^y\left\{\sum_{\kappa=1,\,\kappa\neq j}^{\kappa=n}\left[a_{j,\kappa}(\xi,\eta)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta \xi}(\xi,\eta)+b_{j,\kappa}(\xi,\eta)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta \eta}(\xi,\eta)+c_{j,\kappa}(\xi,\eta)\,z_{\kappa,\mu}(\xi,\eta)\right]\right\}\left\{\begin{matrix}\frac{\partial \mathbf{G}_j}{\delta x}(x,y\,;\\ \xi,\eta\,;1)\,d\eta\end{matrix}\right.\\
&\qquad\qquad+f_j(\xi,\eta)
\end{aligned}\right.\qquad(17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta y}(x,y)\\
&\left\{\begin{aligned}
&=\int_0^x\left\{\sum_{\kappa=1,\,\kappa\neq j}^{\kappa=n}\left[a_{j,\kappa}(\xi,y)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta \xi}(\xi,y)+b_{j,\kappa}(\xi,y)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta y}(\xi,y)+c_{j,\kappa}(\xi,y)\,z_{\kappa,\mu}(\xi,y)\right]\right\}\left\{\begin{matrix}\mathbf{G}_j(x,y\,;\\ \xi,y\,;1)\,d\xi\end{matrix}\right.\\
&\qquad\qquad+f_j(\xi,y)\\
&+\int_0^x d\xi\int_0^y\left\{\sum_{\kappa=1,\,\kappa\neq j}^{\kappa=n}\left[a_{j,\kappa}(\xi,\eta)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta \xi}(\xi,\eta)+b_{j,\kappa}(\xi,\eta)\,\frac{\delta z_{\kappa,\mu}}{\delta \eta}(\xi,\eta)+c_{j,\kappa}(\xi,\eta)\,z_{\kappa,\mu}(\xi,\eta)\right]\right\}\left\{\begin{matrix}\frac{\partial \mathbf{G}_j}{\delta y}(x,y\,;\\ \xi,\eta\,;1)\,d\eta\end{matrix}\right.\\
&\qquad\qquad+f_j(\xi,\eta)
\end{aligned}\right.\qquad(18)
\end{aligned}
$$

§ 3. Au lieu des suites indéfinies (7) et des suites formées par les dérivées partielles premières de leurs termes par rapport à x et à y, considérons les séries

$$(19)\quad \begin{cases} z_{j,0} + (z_{j,1} - z_{j,0}) + \ldots + (z_{j,\mu+1} - z_{j,\mu}) + \ldots \\ \dfrac{\delta z_{j,0}}{\delta x} + \left(\dfrac{\delta z_{j,1}}{\delta x} - \dfrac{\delta z_{j,0}}{\delta x}\right) + \ldots + \left(\dfrac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta x} - \dfrac{\delta z_{j,\mu}}{\delta x}\right) + \ldots \\ \dfrac{\delta z_{j,0}}{\delta y} + \left(\dfrac{\delta z_{j,1}}{\delta y} - \dfrac{\delta z_{j,0}}{\delta y}\right) + \ldots + \left(\dfrac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta y} - \dfrac{\delta z_{j,\mu}}{\delta y}\right) + \ldots \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots p)$$

les fonctions $z_{j,o}$ et leurs dérivées partielles étant nulles et ne figurant ci-dessus que pour la symétrie des écritures.

Désignons par $\mathbf{M}_j$ un nombre positif fixe supérieur à $|a_{js}|$, $|b_{js}|$, $|c_{js}|$. $(s = 1, \ldots p)$ dans le rectangle (R), et par N_j un autre nombre positif fixe supérieur à

$$\left|\mathbf{G}_j\right|, \left|\frac{\partial \mathbf{G}_j}{\delta x}\right|, \left|\frac{\partial \mathbf{G}_j}{\delta y}\right|$$

dans le champ de variation

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant y \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant \beta.$$

Posons, pour abréger,

$$(20)\quad \begin{cases} \Delta_{\mu+1}(x,y) = \sum_{j=1}^{j=p} \left| z_{j,\mu+1}(x,y) - z_{j,\mu}(x,y) \right|, \\ \Delta^{*}_{\mu+1}(x,y) = \sum_{j=1}^{j=p} \left| \dfrac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta x}(x,y) - \dfrac{\delta z_{j,\mu}}{\delta x}(x,y) \right|, \\ \Delta^{**}_{\mu+1}(x,y) = \sum_{j=1}^{j=p} \left| \dfrac{\delta z_{j,\mu+1}}{\delta y}(x,y) - \dfrac{\delta z_{j,\mu}}{\delta y}(x,y) \right|. \end{cases}$$

$$(21)\quad \mathbf{A} = \mathbf{M}_1 \mathbf{N}_1 + \ldots + \mathbf{M}_p \mathbf{N}_p.$$

Les formules (16), (17), (18) permettent d'écrire

$$(22)\quad \begin{cases} \Delta_{\mu+1}(x,y) < \mathrm{A} \left\{ \int_o^x d\xi \int_o^y \left| \Delta_\mu(\xi,\eta) + \Delta^{*}_{\mu}(\xi,\eta) + \Delta^{**}_{\mu}(\xi,\eta) \right| d\eta, \right. \\ \Delta^{*}_{\mu+1}(x,y) < \mathrm{A} \left\{ \int_o^y \left[\Delta_\mu(x,\eta) + \Delta^{*}_{\mu}(x,\eta) + \Delta^{**}_{\mu}(x,\eta) \right] d\eta \right. \\ \qquad \left. + \int_o^x d\xi \int_o^y \left[\Delta_\mu(\xi,\eta) + \Delta^{*}_{\mu}(\xi,\eta) + \Delta^{**}_{\mu}(\xi,\eta) \right] d\eta \right\}, \\ \Delta^{**}_{\mu+1}(x,y) < \mathrm{A} \left\{ \int_o^x \left[\Delta_\mu(\xi,y) + \Delta^{*}_{\mu}(\xi,y) + \Delta^{**}_{\mu}(\xi,y) \right] d\xi \right. \\ \qquad \left. + \int_o^x d\xi \int_o^y \left[\Delta_\mu(\xi,\eta) + \Delta^{*}_{\mu}(\xi,\eta) + \Delta^{**}_{\mu}(\xi,\eta) \right] d\eta \right\}. \end{cases}$$

Or, on voit de suite que

$$(23)\quad \Delta_1(x,y) < B_1\frac{(x+y)^2}{2!},\ \Delta_1^*(x,y) < B_1\frac{x+y}{1!},\ \Delta_1^{**}(x,y) < B_1\frac{x+y}{1!}.$$

B_1 désignant un nouveau nombre fixe.

Les formules (22) conduisent alors aux inégalités

$$(24)\quad \Delta_{\mu+1} < B_{\mu+1}\frac{(x+y)^{\mu+2}}{(\mu+2)!},\ \Delta_{\mu+1}^*(x,y) < B_{\mu+1}\frac{(x+y)^{\mu+1}}{(\mu+1)!},$$

$$\Delta_{\mu+1}^{**}(x,y) < B_{\mu+1}\frac{(x+y)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}.$$

Le nombre fixe $B_{\mu+1}$ est lié au précédent B_μ par la relation

$$(25)\quad B_{\mu+1} = \Upsilon B_\mu\ ,\qquad \Upsilon = A\,[2+3(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2].$$

Les séries (19) sont majorées par des exponentielles. Elles convergent absolument et uniformément. Leurs limites sont les intégrales $\mathbf{Z}_j(x,y;1)$ du système (1) où l'on fait $\lambda = 1$, et les dérivées partielles premières de ces intégrales, moyennant les conditions initiales données

$$(26)\quad \mathbf{Z}_j(x,0;1) = 0,\qquad \mathbf{Z}_j(0,y;1) = 0,\ (j = 1,..p).$$

Remarques sur les fonctions orthogonales à toute fonction harmonique dans un domaine plan, à propos des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible

PAR

J. KAMPÉ DE FÉRIET

I. — Dans le mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible la *fonction de courant* $\psi(x, y, t)$ et le *tourbillon* $\zeta(x, y, t)$ doivent satisfaire à un système de deux équations aux dérivées partielles du 2e ordre :

$$\Delta_2 \psi = -2\zeta \tag{1}$$

$$\frac{\delta \zeta}{\delta t} + \frac{D(\zeta, \psi)}{D(x, y)} = \nu \Delta_2 \zeta ; \tag{2}$$

la seconde équation n'étant pas linéaire, l'intégration de ce système est très difficile ; on ne possède, à l'heure actuelle, aucune méthode générale d'intégration ; on ne connaît que de rares propriétés des intégrales. Les intégrales connues [1] ont été obtenues en introduisant, plutôt par un flair heureux que par des règles systématiques, des conditions supplémentaires ne donnant chaque fois qu'une classe très limitée de solutions.

Or, dans le cas particulier où le fluide visqueux occupe l'intérieur d'une paroi fixe à laquelle il adhère, j'ai remarqué que l'équation (1) jointe aux conditions aux limites, exprimant que la vitesse est nulle sur la paroi :

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = 0 \quad , \quad \frac{\delta \psi}{\delta y} = 0 \qquad \text{sur la frontière,} \tag{3}$$

entraîne une propriété très simple : le *tourbillon* $\zeta(x,y,t)$ *doit à tout instant être orthogonal à toute fonction harmonique dans le domaine.* Les intégrales des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible sont ainsi à rechercher dans une classe bien délimitée et néanmoins très générale de fonctions ; cette note a pour but de présenter quelques remarques au sujet de cette classe, en vue de leur application éventuelle au problème de l'intégration des équations (1) et (2).

---

(1) On trouvera un exposé de ces intégrales élémentaires dans la Thèse de Ratip Berker [1]. — Pour la théorie générale voir l'ouvrage de Henri Villat : — *Leçons sur les Fluides Visqueux*. Paris 1943.

II. — Soit, dans le plan Oxy, un domaine borné S, ayant pour frontière une courbe régulière (1) fermée C ; nous désignerons respectivement par **H, R, A** les trois espaces fonctionnels, constitués par les fonctions réelles $f(x, y) = f(P)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° **H** est l'espace de Hilbert des fonctions à carré sommable sur S ; selon l'usage la norme $\| f \|$ est définie (2) par :

$$\| f \|^2 = \int_S f(P)^2 \, d\sigma_P$$

($d\sigma_P$ élément d'aire au point P)
le produit intérieur des deux fonctions $f(P)$, $g(P)$ par :

$$(f, g) = \int_S f(P)\, g(P)\, d\sigma_P$$

2° **R** est l'espace des fonctions régulières :

a) $f, \dfrac{\delta f}{\delta x}, \dfrac{\delta f}{\delta y}$ continues dans S + C

b) $\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \dfrac{\delta^2 f}{\delta y^2}$ continues dans S.

3° **A** est l'espace des fonctions harmoniques :

a) f est régulière

b) f satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta_2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta^2 y} = 0$$

Il est clair que chacun de ces espaces est contenu dans le précédent :

A C R C H

Les espaces **A** et **R** sont des variétés *linéaires* dans **H.** D'un théorème classique sur la convergence des suites de fonctions harmoniques il résulte que *la variété* **A** *est fermée ;* en effet, *pour une suite de fonctions* $f_n(P) \in \mathbf{A}$, *la convergence forte entraine la convergence uniforme sur tout ensemble fermé* E C S et *par conséquent, en vertu du*

(1) Courbe fermée sans point double, composée d'un nombre fini d'arcs, le long desquels la tangente varie d'une manière continue.

(2) Quand $f(P)$ est une fonction quelconque de **H**, le symbole d'intégration représente une intégrale de Lebesgue ; dans le cas particulier où f est régulière celle-ci se confond avec une intégrale de Riemann.

théorème de Harnack leur limite f (P) *est une fonction harmonique.* Cette proposition découle de l'inégalité : en tout point Q intérieur à S,

$$| f(Q) | \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, R} \| f \|$$

où R désigne le rayon du plus grand cercle de centre Q entièrement contenu dans S + C.

Si D est la distance de l'ensemble fermé E à C, on a donc en tout point Q de E :

$$| f_m(Q) - f_n(Q) | \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, D} \| f_m - f_n \|$$

ce qui suffit pour établir que la convergence forte de la suite entraîne la convergence uniforme sur E.

D'après une propriété classique de l'espace de Hilbert il existe une variété linéaire fermée **B** orthogonale à la variété linéaire fermée **A**, c'est-à-dire telle que pour toute fonction $f \in \mathbf{A}$ et toute fonction $g \in \mathbf{B}$:

$$(f\ ,\ g) = 0.$$

III. — Le Laplacien d'une fonction, dont les deux dérivées premières s'annulent sur la frontière, est orthogonal à toute fonction harmonique ; avec les notations introduites au paragraphe précédent, en utilisant le langage de la Mécanique des Fluides, la proposition démontrée dans un écrit antérieur [2], qui sert de base à ces remarques, s'énonce ainsi :

Si la fonction de courant ψ *vérifie les trois conditions :*

a) $\psi \in \mathbf{R}$

b) ψ = constante sur C

c) $\dfrac{\delta\psi}{\delta n} = 0$ sur C,

le tourbillon ζ, *défini par :*

$$(1) \qquad 2\zeta = -\Delta_2\psi$$

est orthogonal à toute fonction harmonique $u \in \mathbf{A}$:

d) $\zeta \in \mathbf{B}$.

Réciproquement les conditions a) b), d) *entraînent* c). En d'autres termes quand les conditions a) et b) sont remplies, les deux propositions c) et d) sont équivalentes.

Au sujet de cet énoncé remarquons que les deux conditions b) et c) sont équivalentes à la condition (3) qui exprime l'adhérence à la paroi.

Dans le mouvement d'un fluide visqueux la fonction de courant $\psi(x,y,t)$ dépend, en général, du temps t ; le théorème ci-dessus doit être vérifié à chaque instant ; cette proposition exprime une propriété analytique du Laplacien, dans laquelle t intervient seulement comme un paramètre accessoire ; il est donc inutile de le faire figurer explicitement et nous l'omettrons dans la suite.

Lorsque l'on recherche une intégrale particulière des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, occupant un domaine plan borné S limité par une paroi fixe C :

$$(1) \qquad \Delta_2 \psi = -2\zeta$$

$$(2) \qquad \frac{\delta \zeta}{\delta t} + \frac{D(\zeta,\psi)}{D(x,y)} = \nu \Delta_2 \zeta$$

$$(3) \qquad \frac{\delta \psi}{\delta x} = 0 \quad \frac{\delta \psi}{\delta y} = 0 \qquad \text{sur C}$$

le tourbillon ζ doit donc à chaque instant t être une fonction régulière appartenant à **B**, c'est-à-dire appartenant à la variété linéaire **D** intersection de **B** et **R** :

$$(4) \qquad \zeta \in \mathbf{D} = \mathbf{B} \frown \mathbf{R}$$

Si l'on part d'une fonction quelconque ζ appartenant à **D**, en vertu de la solution connue de l'équation de Poisson tenant compte des conditions aux limites, la fonction de courant ψ a pour expression, en tout point Q de S :

$$(5) \qquad \psi(Q) = \frac{1}{\pi} \int_S \zeta(P) \log \frac{1}{\overline{PQ}} \, d\sigma_P + k$$

Ceci montre l'intérêt évident qui s'attache à l'étude des fonctions appartenant à **D**, en vue de leur application à ce problème de Mécanique des Fluides.

Remarquons que dans le système (1), (2), (3), ce sont les équations (1) et (3) qui entraînent la propriété exigeant que le tourbillon appartienne à **D** ; or ces deux équations sont d'origine purement cinématique, traduisant la relation du tourbillon à la fonction de courant et la condition d'adhérence à la paroi ; c'est la seule équation (2) qui traduit une propriété mécanique, exprimant que le mouvement du fluide satisfait aux équations de Navier-Stokes. La propriété $\zeta \in \mathbf{D}$ est donc complètement indépendante de toute hypothèse mécanique, et s'appliquerait encore si l'on substituait d'autres hypothèses à celles de Navier-Stokes en ne conservant que les propriétés purement cinématiques exprimées par (1) et (3).

IV. — Pour former des fonctions appartenant à **B** on peut partir de la la formule de décomposition classique d'une fonction f de l'espace de Hilbert en ses deux *projections* sur deux variétés linéaires fermées orthogonales. Toute fonction $f \in \mathbf{H}$ peut se décomposer d'une et d'une seule manière sous la forme :

$$(6) \qquad f(P) = u(P) + g(P) \quad , \quad u \in \mathbf{A} \ , \ g \in \mathbf{B} \ , \ (u,g) = 0$$

On a :

$$\| f \|^2 = \| u \|^2 + \| g \|^2$$

La fonction u (P) *est la fonction harmonique qui approche le plus de* f (P) en ce sens qu'elle rend minimum la norme :

$$\| f - v \| \qquad v \in \mathbf{A}$$

En effet :

$$\| f - v \|^2 = \| u - v \|^2 + \| g \|^2 > \| g \|^2 = \| f - u \|^2$$

Pour obtenir une fonction $g \in \mathbf{B}$, tout revient donc, en partant d'une fonction arbitraire $f \in \mathbf{H}$, à former $u \in \mathbf{A}$. Soit :

$$w_1(P), \ldots \quad , \quad w_n(P), \ldots$$

une suite orthogonale complète et normée de fonctions harmoniques :

$$w_n \in \mathbf{A} \quad , \quad (w_m , w_n) = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n \quad , \quad \| w_n \| = 1 \ ;$$

cette suite forme une *base* de la variété linéaire **A** , c'est-à-dire que toute fonction $v \in \mathbf{A}$ peut se représenter sous la forme :

$$v(P) = \sum_1^{+\infty} (v, w_n) \, w_n(P).$$

On sait que la série, dont les coefficients (v, w_n) sont les *constantes de Fourier*, converge fortement, par conséquent en vertu du théorème de convergence rappelé au paragraphe II, elle converge uniformément sur tout ensemble fermé E C S ; ceci étant, en partant de (6) les constantes de Fourier de la fonction harmonique $u(P)$ se calculent immédiatement : elles sont égales à celles de la fonction donnée f :

$$(u, w_n) = (f, w_n) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

puisque :

$$(g, w_n) = 0$$

Par conséquent la fonction harmonique $u(P)$, projection de f sur **A**, est définie, en vertu des remarques précédentes sur la convergence, par la série

$$(7) \qquad u(P) = \sum_1^{+\infty} (f, w_n) \, w_n(P)$$

qui est fortement convergente et, donc, uniformément convergente sur tout ensemble fermé $E \subset S$.

En outre :

$$\| u \|^2 = \sum_1^{+\infty} (f, w_n)^2$$

la série des carrés des constantes de Fourier étant convergente.

En partant d'une fonction arbitraire $f \in \mathbf{H}$ on forme donc une fonction $g \in \mathbf{B}$ en posant :

$$(8) \qquad g(P) = f(P) - \sum_1^{+\infty} (f, w_n)\, w_n(P) ;$$

remarquons que l'on a :

$$\| g \|^2 = \| f \|^2 - \| u \|^2$$
$$= \| f \|^2 - \sum_1^{+\infty} (f, w_n)^2$$

Si l'on veut, en vue du problème posé par l'intégration de (2), que g soit en outre régulière :

$$g \in \mathbf{D} = \mathbf{B} \cap \mathbf{R}$$

il suffit évidemment de partir d'une fonction f régulière, puisque u est d'elle-même régulière.

Le domaine S étant borné, il y a souvent intérêt à choisir pour les $w_n(P)$ une suite de polynomes harmoniques orthogonaux dans S ; on peut former une telle suite, en appliquant la méthode d'orthogonalisation de Gram à la suite complète de polynomes harmoniques définis par :

partie réelle de	$(x + iy)^n = r^n \cos n\theta$
partie imaginaire de	$(x + iy)^n = r^n \sin n\theta$

en désignant par r, θ, les coordonnées polaires du point $P(x, y)$.

En particulier lorsque le domaine S est le cercle :

$$r < 1$$

on peut prendre comme suite orthogonale normée les polynomes harmoniques :

$$w_1(P) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$
$$w_{2n}(P) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}}\, r^n \sin n\theta \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$w_{2n+1}(P) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}}\, r^n \cos n\theta$$

En désignant par Q un point arbitraire de coordonnées polaires ρ, φ $(\rho < 1)$ pour tout $f \in \mathbf{H}$ la fonction harmonique définie par (7), a pour valeur au point Q :

$$(9) \qquad u(Q) = \int_S f(P)\, K(P, Q)\, d\sigma_p$$

où

$$(10) \quad K(P, Q) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 + 4 r^2\rho^2 [r \rho \cos(\theta - \varphi) - 1] - r^4 \rho^4}{(1 - 2 r\rho \cos(\theta - \varphi) + r^2 \rho^2)^2}$$

comme on le voit aisément en calculant la somme de la série uniformément convergente en r θ, pour $\rho \leq \rho_0 < 1$:

$$\frac{1}{\pi}\left[1 + 2 \sum_1^{+\infty} (n+1)\, r^n \rho^n \cos n(\theta - \varphi)\right]$$

La projection de f sur $\mathbf{B}$ est alors définie par :

$$g(Q) = f(Q) - \int_S f(P)\, K(P,Q)\, d\sigma_P$$

ou

$$(11) \qquad g(Q) = \int_S [f(Q) - f(P)]\, K(P, Q)\, d\sigma_P.$$

Dans le cas où le domaine S est le cercle $r < 1$, cette formule donne l'expression générale d'une fonction $g \in \mathbf{B}$, à partir d'une fonction arbitraire $f \in \mathbf{H}$. Si on astreint en outre f à être régulière, il en sera de même de g.

On peut donner d'ailleurs une autre forme à $u(Q)$, en partant de la relation suivante, qui se vérifie facilement :

$$(12) \qquad \begin{aligned} K(P, Q) &= \Delta_2 [\rho^2 H(P, Q)] \\ H(P, Q) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1 - r^2 \rho^2}{1 - 2 r \rho \cos(\theta - \varphi) + r^2 \rho^2} \end{aligned},$$

le Laplacien Δ_2 opérant dans cette formule sur les coordonnées du point Q. Soit donc $v(Q)$ la fonction harmonique :

$$(13) \qquad v(Q) = \int_S f(P)\, H(P, Q)\, d\sigma_P \quad ;$$

l'expression (9) de la projection u de f sur $\mathbf{A}$ prend la forme

$$(14) \qquad u(Q) = \Delta_2 [\rho^2 v(Q)]$$

Le noyau H (P, Q) qui figure dans (13) conduit en général à des calculs plus simples que le noyau K (P, Q).

Dans le cas général, lorsque le domaine S est quelconque, des calculs, un peu moins simples que dans le cas du cercle, mais ne faisant appel

qu'à des formules classiques concernant les fonctions harmoniques et biharmoniques, conduisent au résultat suivant. Soit :

1° G (P, Q) la fonction de Green pour le problème de Dirichlet :

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\overline{PQ}} + G_1(P, Q)$$

où G_1 désigne une fonction harmonique de P et Q symétrique en P et Q, telle que :

$$G(P, Q) = 0 \quad , \quad P \text{ sur } C$$

2° Γ (P, Q) la fonction de Green pour le problème de Dirichlet biharmonique :

$$\Gamma(P, Q) = \frac{1}{8\pi} \overline{PQ^2} \log \frac{1}{\overline{PQ}} + \Gamma_1(P, Q)$$

où Γ_1 désigne une fonction biharmonique de P et Q, symétrique en P et Q, telle que :

$$\Gamma(P, Q) = 0 \qquad \frac{\delta}{\delta n_P} \Gamma(P, Q) = 0 \qquad P \text{ sur } C$$

Posons :

$$\Upsilon(P, Q) = \Delta_2^{(Q)} \Delta_2^{(P)} \Gamma(P, Q),$$

l'opérateur de Laplace étant appliqué à Γ successivement par rapport aux coordonnées de P et de Q.

Ceci étant, la projection u (Q) sur $\mathbf{A}$, d'une fonction arbitraire $f(P) \in \mathbf{H}$, assujettie à la condition d'être continue ainsi que ses dérivées premières sur $\mathbf{S}$, (conditions suffisantes pour l'existence d'une solution θ (P) de l'équation de Poisson : $\Delta_2 \theta = -f$), a pour expression :

$$(15) \qquad u(Q) = \int_C \frac{\delta}{\delta n_P} \theta(P) . \Upsilon(P, Q) \, d\sigma_P ,$$

où la fonction θ (Q) est définie par :

$$(16) \qquad \theta(Q) = -\int_S f(P) \, G(P, Q) \, d\sigma_P$$

BIBLIOGRAPHIE :

1. — A. Ratip Berker. — Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. — *Thèse Lille* 1936. —

2. — J. Kampé de Fériet. — On a property of the Laplacian of a function in a two dimensional bounded domain, when the first derivatives of the function vanish at the boundary. — *Mathematics Magazine I* N° 2, 1947. —

Sur les hauteurs du tétraèdre

PAR

M. Victor THÉBAULT, Tennie (France)

A propos du problème qui consiste à construire un triangle ABC dont on connaît les symétriques des sommets par rapport aux côtés opposés (1), plusieurs notes intitulées *The Problem of three images* ont été publiées.(2)

Si les hauteurs AA', BB', CC' rencontrent la circonférence circonscrite en A_1, B_1, C_1, les symétriques des sommets A, B, C, par rapport aux côtés opposés, se confondent avec les orthocentres des triangles A_1BC, B_1CA, C_1AB.

Cette remarque suggère une analogie complète entre le triangle et le tétraèdre.

1. Dans un tétraèdre quelconque T = ABCD, soient O le centre de la sphère circonscrite (O, R) ; A',B',C',D' les pieds des hauteurs AA', BB', CC', DD' qui recoupent la surface de la sphère (O, R) en A_1,B_1,C_1,D_1 ; G, G*a*, G*b*, G*c*, G*d* les centres de gravité des tétraèdres T, T*a* = A_1 BCD, T*b* = B_1 CDA, T*c* = C_1 DAB, T*d* = D_1 ABC ; M le point de Monge ; K le *premier* point de Lemoine.

2. Si un point P de OG, tel que OP : OG = k, se projette orthogonalement en P*a*, P*b*, P*c*, P*d* sur les plans de faces BCD, CDA, DAB, ABC, on a en grandeur et en signe, (3),

$$\mathrm{PP}a = \frac{2-k}{4} \cdot \mathrm{AA'} + \frac{1-k}{2} \cdot \mathrm{A_1A'}, \ \ldots$$

Lorsque k = 2, P = M, et les distances du point M de Monge aux plans des faces de T sont égales à $\frac{1}{2}$ A'A_1, $\frac{1}{2}$ B'B_1, $\frac{1}{2}$ C'C_1, $\frac{1}{2}$ D'D_1.

3. Théorème. *Le tétraèdre* t = MaMbMcMd *dont les sommets sont les points de* Monge *de* Ta, Tb, Tc, Td, *est transformé du tétraèdre podaire* t' = $\alpha\beta\gamma\delta$, *dans le tétraèdre* T, *du centre* O_{12} *de la sphère* (O_{12}) *des douze points de celui-ci par l'homothétie* (G,3).

---

(1) Waffelbakker, *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1900-356.

(2) Pour une bibliographie voir *Mathesis* t. LVI — 29.

(3) V. Thébault, *Comptes-Rendus*, 1944 — 262.

Les points (M, Ma, Mb, Mc, Md) et (G, Ga, Gb, Gc, Gd) se correspondent dans l'homothétie (O,2) et les droites MMa, MMb, MMc, MMd sont normales aux plans des faces de T.

De plus, pour la même raison que dans le tétraèdre T, les distances des points Ma, Mb, Mc, Md, aux plans BCD, CDA, DAB, ABC sont égales à $\frac{1}{2}$A'A, $\frac{1}{2}$B'B, $\frac{1}{2}$C'C, $\frac{1}{2}$D'D. Or, les distances du point O_{12} aux mêmes plans sont égales à $\frac{1}{6}$ AA_1, $\frac{1}{6}$ BB_1, $\frac{1}{6}$ CC_1, $\frac{1}{6}$ DD_1, (1) et le théorème est démontré.

Corollaire I. *On a la relation*

$$V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 + V_d^2 = V^2$$

entre les volumes des tétraèdres Ta, Tb, Tc, Td, T.

Corollaire II. *Les tétraèdres* T, t *sont orthologiques et les centres d'orthologie coïncident avec le point* M *de* Monge *et le conjugué isogonal* O'_{12} *dans le tétraèdre fondamental, du centre* O_{12} *de la sphère* (O_{12}).

Corollaire III. *Dans un tétraèdre* T, *le* premier *point de* Lemoine K *coïncide avec le centre des moyennes distances des projections orthogonales* A_2, B_2, C_2, D_2 *sur les hauteurs* AA', BB', CC', DD' *des sommets de* t, *affectées de masses proportionnelles aux carrés* A^2, B^2, C^2, D^2 *des aires des faces.*

Car les points A_2, B_2, C_2, D_2, divisent les hauteurs dans le même rapport

$$A_2A : A_2A' = B_2B : B_2B' = C_2C : C_2C' = D_2D : D_2D' = 3.$$

4. Théorème. *Le point* O'_{12} *est aligné sur les centres des sphères* (O),(O') *circonscrites aux tétraèdres* T, t *et il partage la distance* OO' *dans le rapport de* -2 *à* 1.

Le point O_{12} divise OG dans le rapport de 3 à 1 et le centre w de la sphère (w) circonscrite à t partage la distance GO' dans le rapport de 1 à 2 ; les points O_{12}, O'_{12} sont symétriques par rapport à ω. Le théorème de Menelaus appliqué, d'une part, au triangle $G\omega O_{12}$ coupé par la transversale $O'O'_{12}$, ensuite, au triangle GOO' et à la transversale $O_{12}\omega$, prouve que $O'O'_{12}$ passe par O, et que

$$O'_{12}O : O'_{12}O' = -2 : 1$$

Il en résulte que O'M *est parallèle à* O'_{12} O_{12} *et* $O'M = 2\ O'_{12}O_{12}$.

---

(1) V. Thébault, *Bull. de l'Ecole Polytechnique de Timisorra*, 1944 — 25.
R. Blanchard, *Mathesis* t. LV — 29.

Note. Ce qui précède suppose le point O'_{12} à distance finie, et O_{12}, O'_{12} sont les foyers d'une quadrique de révolution (Σ) inscrite à T. Mais, O'_{12} est rejeté à l'infini lorsque son inverse O_{12} est sur la surface cubique (C) de Cayley. Dans ce cas, (Σ) est un paraboloïde de foyer O_{12} inscrit à T.

Donc, *lorsque* O_{12} *est sur la surface* (C) *les points de* Monge Ma, Mb, Mc, Md *de* Ta, Tb, Tc, Td *sont dans le plan* (π_1) *transformé par l'homothétie* (G,3) *du plan de* Simson *de* O_{12} *dans* T. Il existe des tétraèdres T dont deux hauteurs sont tangentes à la sphère circonscrite (O) [1]. Dans ce cas, le tétraèdre t' et le tétraèdre t se réduisent à deux plans parallèles; *les points* O_{12} *et* M *sont situés respectivement sur la surface de* Cayley *de* T *et sur la surface de* Cayley (C_1) *du tétraèdre anticomplémentaire* T_1 *de celui-ci.*

5. Plus généralement, on a cette proposition :

Théorème. *Dans un tétraèdre* T, *si les points* A_3, B_3, C_3, D_3, *divisent les distances* OGa, OGb, OGc, OGd *dans le même rapport*

$$OA_3 : OGa = OB_3 : OGb = OC_3 : OGc = OD_3 : OGd = k,$$

le tétraèdre $t_3 \equiv A_3B_3C_3D_3$ *est le transformé du tétraèdre* t' *par l'homothétie* $(Q, \frac{3}{2}k)$, Q *étant le point qui partage la distance* OO_{12} *dans le rapport de* 3k *à* $(4 - 3k)$. *Le point* O'_{12} *est sur la droite des centres des sphères* (O), (O') *circonscrites à* T, t_3 *et il partage la distance* OO' *dans le rapport de* 4 *à* $4 - 3k$.

Corollaire. *Le point* O'_{12} *coincide avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ayant pour sommets les centres des sphères des douze points des tétraèdres* Ta, Tb, Tc, Td.

$$\text{Car} \quad k = OO_{12} : OG = 4 : 3, \text{ et } O' \equiv O'_{12}$$

5. Tétraèdre orthocentrique T. Les points de Monge de T*a*, T*b*, T*c*, T*d* coïncident avec les orthocentres H*a*, H*b*, H*c*, H*d*, et $HHa = \frac{1}{2}AA_1$,

$$HHb = \frac{1}{2}BB_1,\ HHc = \frac{1}{2}CC_1,\ HHd\ \frac{1}{2}DD_1,$$

$$A'Ha = \frac{1}{2}AA',\ B'Hb = \frac{1}{2}BB',\ C'Hc = \frac{1}{2}CC',\ D'Hd = \frac{1}{2}DD',$$

H étant l'orthocentre de T.

Théorème. *Dans un tétraèdre orthocentrique* T, *le centre des moyennes distances des orthocentres des tétraèdres* Ta, Tb, Tc, Td, *affectés de masses proportionnelles aux carrés des aires des faces correspondantes coïncide avec le* premier *point de* Lemoine K.

(1) V. Thébault, *loc. cit.* — R. Blanchard, *loc. cit.*

Théorème. *Dans un tétraèdre orthocentrique* T, *si le centre de la* seconde *sphère des douze points est situé sur la surface cubique de* Cayley (C) *les orthocentres des tétraèdres* Ta, Tb, Tc, Td *sont dans le plan* (π_1) *de* Simson, *pour le tétraèdre* T_1, *de l'un des points où la droite* OG *rencontre* (C_1) *et ce plan passe par le* premier *point de* Lemoine K.

N. B. Plus généralement *dans un tétraèdre quelconque* T, *il existe trois plans qui divisent les hauteurs dans le même rapport.* (1) *Ces plans concourent au* premier *point de* Lemoine K.

Ajoutons aussi que *les pôles par rapport à un tétraèdre quelconque, des plans qui passent par le* premier *point de* Lemoine K *appartiennent à la surface* (C) *de* Cayley. Sur ces points, il y a donc aussi analogie complète avec le triangle.

6. Dans l'hypothèse où la sphère circonscrite (O,R) découpe sur les hauteurs AA', BB', CC', DD', d'un tétraèdre quelconque T des cordes égales

$$\pm AA_1 = \pm BB_1 = \pm CC_1 = \pm DD_1,$$

le centre O_{12} *de la sphère des douze points se confond avec celui d'une des sphères tangentes aux quatre plans des faces.* Si c'est le centre I de la sphère inscrite (I), *les points* O, G, I *sont collinéaires, et*

$$OG = 3GI \ , \ IG.a = \frac{1}{3}R,$$

G'*a étant le centre de gravité du triangle* BCD.

Ces propriétés concernent, en particulier, un tétraèdre T *équifacial.*

7. A propos de la surface (C) de Cayley dont il vient d'être question, voici une intéressante propriété que M. R. Bouvaist nous avait communiquée en 1942.

Théorème. *Dans un tétraèdre quelconque* T, *si une génératrice de l'hyperboloïde des hauteurs,* du même système que les hauteurs, *rencontre la surface* (C) *de* Cayley *en* M_1, M_2, M_3, *les plans de* Simson *de ces points forment un trièdre trirectangle.*

Soit une droite Δ qui rencontre la surface (C) en M_1, M_2, M_3. L'inverse tétraédrique du plan (A, Δ) est un cône du second ordre passant par les points inverses M'_1, M'_2, M'_3 de M_1, M_2, M_3 et situés dans le plan de l'infini.

Condition pour que le cône (A Δ) *soit équilatère.* On a successivement en coordonnées normales,

$$\Delta \equiv \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} = \frac{t - t_1}{\delta},$$

(1) R. Deaux, *Mathesis,* 1932-149.

$$(A\,\Delta) \equiv \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{Cône inverse} \equiv \begin{vmatrix} zt & yt & yz \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$zt\,(\delta z_1 - \gamma t_1) + yt\,(\beta t_1 - \delta y_1) + yz\,(\gamma y_1 - \beta z_1) = 0\,;$$

ce cône doit être harmoniquement circonscrit au cercle de l'infini

$u^2 + v^2 + w^2 + s^2 - 2vw\cos a' - 2uw\cos b' - 2uv\cos c' - 2us\cos a - 2vs\cos b - 2ws\cos c = 0$. (1)

Il en résulte la condition

$$\cos c\,(\delta z_1 - \gamma t_1) + \cos b\,(\beta t_1 - \delta y_1) + \cos a'\,(\gamma y_1 - \beta z_1) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos a' \\ y_1 & z_1 & t_1 \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime que Δ rencontre la droite

$$\frac{y}{\cos c} = \frac{z}{\cos b} = \frac{t}{\cos a'}$$

qui est une deuxième génératrice de l'hyperboloïde des hauteurs passant par A.

Si l'on suppose alors que Δ soit une génératrice de l'hyperboloïde des hauteurs, *du même système que les hauteurs*, les quatre cônes (AΔ), (BΔ), (CΔ), (DΔ) sont équilatères. Comme ils contiennent les points à l'infini M_1', M_2', M_3', cette condition exige que le triangle $M_1' M_2' M_3'$ soit conjugué au cercle de l'infini. Les trièdres A (M_1', M_2', M_3'), B (M_1', M_2', M_3'), ..., sont trirectangles et les plans de Simson de M_1, M_2, M_3 forment un trièdre trirectangle. Le théorème est donc démontré.

(1) a désigne le dièdre suivant l'arête BC, ...

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'ÉQUATION INTÉGRALE

$$\int_0^\infty \frac{t^x f(x)\,dx}{\Gamma(1+x)} = g(t) \tag{1}$$

Note de M. M. Parodi [1]

Considérons la relation définissant l'image $\varphi(p)$ d'une fonction $f(s)$

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-ps} f(s)\,ds$$

Remplaçons p par $\log p$, nous obtenons

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log p} = \int_0^\infty p^{-s} f(s)\,ds$$

Comme

$$p^{-s} \subset \frac{t^s}{\Gamma(1+s)}$$

il vient, ainsi que l'a montré M. P. Humbert [2]

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log p} \subset \int_0^\infty \frac{t^s f(s)\,ds}{\Gamma(1+s)}$$

A. — Ceci posé, représentons par $\theta(p)$ l'image de $g(t)$; l'équation (1) admet la transformée

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log p} = \theta(p)$$

Posons $\log p = q$, nous obtenons

$$\varphi(q) = q\,\theta(e^q)$$

relation dont on déduirait une solution $f(x)$ de la proposée.

Considérons maintenant l'équation

$$\int_0^\infty \frac{t^x f(x)\,dx}{\Gamma(1+x)} = \int_0^t \cdots \int_0^t g(t)\,(dt)^n \qquad (n \text{ entier} > 0) \tag{2}$$

---

[1] Note présentée à la session du 30 octobre 1947, à Louvain.

[2] *Bull. soc. math. France*, 65, 1937, p. 119.

qui est du même type que (1), mais où $g(t)$ a été remplacé par $\int_0^t \dots \int_0^t g(t)\,(dt)^n$. Cette équation a pour transformée

$$\frac{\varphi_n(\log p)}{\log p} = \frac{1}{p_n}\,\theta(p)$$

où $\varphi_n(p)$ représente l'image d'une solution $f_n(x)$ de (2).

Avec le changement de variable susvisé, il vient

$$\varphi_n(q) = qe^{-q_n}\,\theta(e^q) = e^{-q_n}\,\varphi(q)$$

et en remontant aux originaux on obtient

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < n \\ f(x-n) & \text{pour } x > n \end{cases}$$

relation qui lie, si elles existent, les solutions des équations (1) et (2).

Nous obtenons ainsi le théorème : *toute solution de l'équation* (2) *se déduit de celle de* (1) *par une translation de valeur* n, *parallèle à l'axe des* x (en faisant la convention $f(x) \equiv 0$ pour $x < 0$).

Ces résultats permettent de retrouver des propriétés de la fonction $\nu(n, t)$ « incomplète » introduite par M. M. Humbert et L. Poli (1).

Soit, par exemple, à résoudre l'équation

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{t^x f(x)}{\Gamma(1+x)}\,dx = \int_0^t \dots \int_0^t \nu(t)\,(dt)^n$$

$\nu(t)$ étant la fonction étudiée par M. Colombo (2) et introduite en Analyse par M. M. Volterra et Pérès (3) :

$$\nu(t) = \int_0^\infty \frac{t^x\,dx}{\Gamma(1+x)}$$

D'après la définition même de $\nu(t)$, on voit que la solution de l'équation proposée (3) sera

$$\Upsilon(x-n)$$

$\Upsilon(x)$ étant la fonction unité.

Ainsi

$$\int_0^t \dots \int_0^t \nu(t)\,(dt)^n = \int_n^x \frac{t^x\,dx}{\Gamma(1+x)} = \nu(t, n)$$

(1) *Bull. sciences math.*, 68, 1944, p. 204.

(2) *Bull. sciences math.*, 67, 1943, p. 104.

(3) Leçons sur la composition et les fonctions permutables, ch. IX, Paris, Gauthier-Villars, 1924.

B. — Cherchons la condition que doit satisfaire la fonction $g(t)$ pour que l'équation (1) admette une solution de la forme

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{t^x\, g(x)\, dx}{\Gamma(1+x)} \tag{4}$$

La transformée de (1) permet d'écrire

$$\varphi(p) = p\,\theta(e^p)$$

et celle de (4) est

$$\frac{\theta(\log p)}{\log p} = \varphi(p)$$

Il faut donc que l'on ait

$$\frac{\theta(\log p)}{\log p} = p\,\theta(e^q)$$

Posons $e^p = z$, nous obtenons

$$\frac{\theta[\log\log z]}{\log z.\ \log\log z} = \theta(z)$$

Or [1]

$$\frac{\theta[\log\log z]}{\log z.\ \log\log z} \text{ (} \int_0^\infty \frac{\mu(t, s)\, g(s)\, ds}{\Gamma(1+s)}$$

donc $g(t)$ doit satisfaire à la relation

$$\int_0^\infty \frac{\mu(t, s)\, g(s)\, ds}{\Gamma(1+s)} = g(t)$$

où

$$\mu(t, m) = \int_0^\infty \frac{s^m\, t^s}{\Gamma(1+s)}\, ds$$

---

[1] P. Humbert et L. Poli, *loc. cit.*

La récession des nébuleuses extra-galactiques

(2e partie) (1)

PAR

P. DRUMAUX

Professeur à l'Université de Gand

Avant de continuer notre étude du mouvement des nébuleuses rappelons que celle-ci procède par approximation. Les trajectoires obtenues ne sont donc pas valables dans leur totalité mais uniquement au voisinage de la voie lactée pour une partie du parcours de l'ordre de cent millions d'années-lumière et cette portion du trajet est elle-même à considérer comme n'étant qu'approximative. Quand nous parlerons donc de la trajectoire dans toute son étendue, ce ne sera que pour fixer les idées au sujet de la partie valable du parcours.

Rappelons aussi que notre étude a un caractère macroscopique, vu que la densité de répartition de la matière entrant dans la loi de gravitation est elle-même macroscopique. Nous n'atteindrons donc pas le mouvement individuel des nébuleuses, mais seulement des valeurs moyennes se rapportant à des éléments de volume de l'espace cosmique relativement petits contenant, disons, une centaine de nébuleuses.

Dans notre précédente communication (2) nous avons montré, dans le cas que nous spécifierons ci-dessous, que les trajectoires des nébuleuses sont des courbes en vrille dont la projection sur un plan convenablement choisi est une spirale elliptique.

Pour mieux préciser le cas en question, rappelons d'abord qu'on peut déduire de la loi générale de gravitation que la vitesse v des nébuleuses est une fonction vectorielle linéaire du rayon-vecteur r mené de la voie lactée vers la nébuleuse envisagée. Dans des axes

(1) Pour la première partie de cette étude voir *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, T. LXI (1947), Série I, 3e fascicule, décembre 1947, p. 228.

(2) Ibidem, p. 232.

coordonnés trirectangulaires à leur origine O, supposée solidaire de la voie lactée, les composantes v_1, v_2 et v_3 de la vitesse s'expriment par les relations :

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ v_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ v_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées spatiales de la nébuleuse et où les 9 coefficients $a_{\mu\nu}$ dépendent de la métrique de l'espace-temps osculateur ayant avec l'espace-temps réel un contact du 3e ordre sur la voie lactée et à l'époque cosmique actuelle prise comme origine pour le temps t.

Rappelons aussi que l'intégration des équations (1) donne les équations paramétriques des trajectoires :

$$\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \alpha_{\mu 3}x_3 = e^{k_\mu t + C_\mu} \quad (\mu = 1,\ 2,\ 3) \qquad (8)$$

où k_μ représente les trois racines de la cubique :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - k & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Les coefficients $\alpha_{\mu\nu}$ sont les solutions correspondantes des équations :

$$\begin{aligned} a_{11}\,\alpha_{\mu 1} + a_{21}\,\alpha_{\mu 2} + a_{31}\,\alpha_{\mu 3} &= k_\mu\,\alpha_{\mu 1} \\ a_{12}\,\alpha_{\mu 1} + a_{22}\,\alpha_{\mu 2} + a_{32}\,\alpha_{\mu 3} &= k_\mu\,\alpha_{\mu 2} \\ a_{13}\,\alpha_{\mu 1} + a_{23}\,\alpha_{\mu 2} + a_{33}\,\alpha_{\mu 3} &= k_\mu\,\alpha_{\mu 3} \end{aligned} \qquad (4)$$

et les constantes C_μ sont des constantes d'intégration.

Rappelons encore que par un changement de coordonnées en posant

$$x'_\mu = \alpha_{\mu 1}\,x_1 + \alpha_{\mu 2}\,x_2 + \alpha_{\mu 3}\,x_3 \qquad (9)$$

les éq. (8) deviennent, si $(x'_\mu)_o$ désigne x'_μ pour $t = 0$:

$$x'_1 = (x'_1)_o\,e^{k_1 t} \quad x'_2 = (x'_2)_o\,e^{k_2 t} \quad x'_3 = (x'_3)_o\,e^{k_3 t} \qquad (11)$$

Rappelons enfin que les nouvelles coordonnées sont normales par rapport au trièdre des trois plans P_μ correspondant aux équations :

$$\alpha_{\mu 1}\,x_1 + \alpha_{\mu 2}\,x_2 + \alpha_{\mu 3}\,x_3 = 0$$

Cela étant, les trajectoires susdites en vrille spiraloïde correspondaient au cas où la cubique (5) n'avait qu'une seule racine réelle.

* * *

Nous allons maintenant traiter le cas des trois racines réelles, et ensuite examiner l'ensemble des deux cas.

Les équations (11) montrent que pour trois racines réelles les trajectoires sont des courbes gauches à caractère exponentiel et que le mouvement est apériodique, tandis qu'il comportait des fonctions périodiques dans le cas d'une seule racine. Les trajectoires deviennent planes pour les nébuleuses dont l'une des trois coordonnées initiales $(x'_\mu)_o$ est nulle, c'est-à-dire pour les nébuleuses situées à l'époque cosmique actuelle dans l'un des trois plans P_μ car alors $x'_\mu = 0$ et ces nébuleuses se mouvront donc dans ce plan. Les trajectoires seront rectilignes pour les nébuleuses situées actuellement sur l'une des trois intersections de ces plans.

Les trajectoires sont représentées par les équations :

$$\frac{1}{k_1}\log\frac{x'_1}{(x'_1)_o} = \frac{1}{k_2}\log\frac{x'_2}{(x'_2)_0} = \frac{1}{k_3}\log\frac{x'_3}{(x'_3)_o} = t \qquad (20)$$

Une image logarithmique des trajectoires s'obtient en posant $\log\frac{x'_\mu}{(x'_\mu)_o} = \xi_\mu$, ce qui donne l'abaque répondant aux équations :

$$\frac{\xi_1}{k_1} = \frac{\xi_2}{k_2} = \frac{\xi_3}{k_3} = t \qquad (21)$$

c'est-à-dire une droite unique figurant l'ensemble des trajectoires et dont l'orientation dépend des trois racines de (5).

Bien que les équations paramétriques (11) aient une forme simple, elles sont en réalité complexes parce qu'elles contiennent les racines susdites.

Les éléments de départ dans ce problème sont en effet les 9 coefficients $a_{\mu\nu}$ des équations (1) et d'autre part les racines k_μ sont des fonc-fonctions compliquées de ces coefficients, vu que l'équation (5) est du 3e degré.

Nous allons montrer que la complexité qui en résulte peut néanmoins se résoudre en éléments simples.

Repartons pour cela des équations (1) et décomposons le vecteur $\overline{v}$ en deux composantes $\overline{u}$ et $\overline{w}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}x_1 + \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21})x_2 + \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31})x_3 \\
u_2 &= \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12})x_1 + a_{22}x_2 + \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32})x_3 \qquad (22) \\
u_3 &= \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13})x_1 + \frac{1}{2}(a_{32}+a_{23})x_2 + a_{33}x_3
\end{aligned}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21})x_2 - \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13})x_3$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}(a_{12} - a_{21})x_1 + \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32})x_3 \qquad (23)$$

$$w_3 = \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13})x_1 - \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32})x_2$$

La composante $\overline{u}$ est du type irrotationnel, à nouveau décomposable en un mouvement radial et un mouvement transversal de nutation, tandis que la composante $\overline{w}$ est solénoïdale et représente une vitesse de rotation ou précession autour d'un axe dont les cosinus directeurs sont respectivement proportionnels à $a_{23} - a_{32}$, $a_{31} - a_{13}$ et $a_{12} - a_{21}$. Les composantes de la vitesse angulaire $\overline{\omega}$ sont :

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}) \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}) \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) \qquad (24)$$

La vitesse transversale, qui était insoupçonnée, correspond donc non seulement à une nutation mais en outre à un immense mouvement de rotation de l'ensemble des nébuleuses extra-galactiques autour d'un axe, que nous appellerons l'axe cosmique sans en faire pour cela un axe de rotation de tout l'Univers mais simplement un axe de caractère local, tout comme le champ cosmique envisagé antérieurement [1].

Ayant ainsi décomposé le mouvement des nébuleuses en deux mouvements simultanés, à savoir un mouvement relatif correspondant à la vitesse $\overline{u}$ et un mouvement d'entraînement ou de précession correspondant à la vitesse $\overline{w}$, voyons dans quel cas le mouvement absolu primitif sera soit spiraloïde correspondant à l'existence d'une seule racine réelle de la cubique (5), soit exponentiel apériodique correspondant à l'existence de trois racines réelles.

Opérons pour cela un changement de coordonnées. Considérons toutes les nébuleuses situées sur une sphère de rayon r ayant la voie lactée pour centre et menons à partir de l'origine O un vecteur égal et parallèle à la vitesse $\overline{v}$ de chacune de ces nébuleuses. Nous obtien-

---

[1] La répartition macroscopique des nébuleuses extra-galactiques — *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*. Tome LX (1940-1946), série I, 3e fascicule. Juillet 1946, p. 115.

La récession des nébuleuses extra-galactiques et leur répartition macroscopique. *Ibidem*. Tome LX (1940-1946), série I, 4e fascicule. Décembre 1946. p. 213.

drons ainsi un ellipsoïde vu que les équations (1) représentent une fonction vectorielle linéaire. La même opération effectuée sur la composante $\overline{u}$ donnera un second ellipsoïde dont nous prendrons les axes comme nouveaux axes coordonnés.

Les propriétés des fonctions vectorielles linéaires montrent que dans ces nouveaux axes, où nous désignerons lesdiverses grandeurs précédentes par des majuscules, les composantes U_1, U_2 et U_3 de la vitesse $\overline{u}$ sont données par :

$$U_1 = A_{11}X_1 \qquad U_2 = A_{22}X_2 \qquad U_3 = A_{33}X_3 \qquad (25)$$

vu que le tableau des coefficients de (22) est symétrique.

D'autre part comme le vecteur $\overline{w}$ correspond à une rotation :

$$W_1 = \Omega_3X_2 - \Omega_2X_3 \quad W_2 = \Omega_1X_3 - \Omega_3X_1 \quad W_3 = \Omega_2X_1 - \Omega_1X_2 \quad (26)$$

Enfin comme $\overline{v} = \overline{u} + \overline{w}$ on aura :

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11}X_1 + \Omega_3X_2 - \Omega_2X_3 \\ V_2 &= -\Omega_3X_1 + A_{22}X_2 + \Omega_1X_3 \\ V_3 &= \Omega_2X_1 - \Omega_1X_2 + A_{33}X_3 \end{aligned} \qquad (27)$$

c'est-à-dire que le déterminant des a_{uv} de (1) est devenu gauche.

La cubique (5) devient alors :

$$\begin{vmatrix} A_{11} - K & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & A_{22} - K & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & A_{33} - K \end{vmatrix} = 0 \qquad (28)$$

dont l'examen montre qu'elle a ou bien une seule racine réelle ou bien trois selon que la vitesse angulaire de précession $\overline{\omega}$ est grande ou petite. En effet la cubique a pour développement :

$$(A_{11}-K)(A_{22}-K)(A_{33}-K)+\Omega_1^2(A_{11}-K)+\Omega_2^2(A_{22}-K)+\Omega_3^2(A_{33}-K)=0$$

Posons : $$f_1(K) \equiv (A_{11} - K)(A_{22} - K)(A_{33} - K) \qquad (29)$$

$$f_2(K) = -[\Omega_1^2(A_{11} - K) + \Omega_2^2(A_{22} - K) + \Omega_3^2(A_{33} - K)] \quad (30)$$

Les racines correspondront à $f_1(K) = f_2(K)$. Considérons $f_1(K)$ comme une ordonnée et K comme une abscisse. Alors (29) représente une courbe en forme de S renversé coupant l'axe des K en trois points réels ayant pour abscisses A_{11}, A_{22} et A_{33}. De même si $f_2(K)$ est considéré comme une ordonnée, l'équation (30), qui peut s'écrire :

$$f_2(K) = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)K - (\Omega_1^2A_{11} + \Omega_2^2A_{22} + \Omega_3^2A_{33})$$

représente une droite de coefficient angulaire $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2$ et d'ordonnée à l'origine égale à $-(\Omega_1^2 A_{11} + \Omega_2^2 A_{22} + \Omega_3^2 A_{33})$. Les points d'intersection de la droite et de la courbe correspondront aux racines de (28). Notons maintenant que la cubique (29) ne dépend pas de la précession tandis que le coefficient angulaire de la droite en dépend exclusivement. On peut donc en considérant une précession de plus en plus petite réduire à volonté le coefficient angulaire sans modifier la courbe, et réduire aussi à volonté la valeur absolue de l'ordonnée à l'origine de la droite, toujours sans changer la courbe. Or pour une valeur suffisamment petite du coefficient angulaire et de l'ordonnée à l'origine la droite coupe la courbe en trois points, tandis que pour une valeur suffisamment grande du coefficient angulaire la droite ne coupe la courbe qu'en un seul point.

Le mouvement des nébuleuses sera donc ou bien spiraloïde ou bien apériodique selon que la précession est grande ou petite.

Remarquons que d'après (23) l'existence de la précession est liée à la non-permutabilité des indices μ et ν des coefficients $a_{\mu\nu}$ de (1), lesquels dépendent des termes du 3e ordre dans les potentiels gravifiques osculateurs $g_{\mu\nu}$. Ainsi que nous l'avons montré antérieurement[1] on a :

$$g_{\mu\nu} = E + A_{\alpha}^{\mu\nu} x_\alpha + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^{\mu\nu} x_\alpha x_\beta + \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots \qquad (2)$$

$$a_{\mu\nu} = \frac{c}{2\kappa\rho}\left[\left(C_{14\nu}^{\mu 1} - C_{\mu 4\nu}^{11}\right) + \left(C_{24\nu}^{\mu 2} - C_{\mu 4\nu}^{22}\right) + \left(C_{34\nu}^{\mu 3} - C_{\mu 4\nu}^{33}\right)\right] \qquad (3)$$

Or les indices inférieurs des coefficients C sont permutables entre eux de même que les indices supérieurs, mais les inférieurs ne le sont pas avec les supérieurs. Il y a donc toujours précession et le mouvement de rotation de l'ensemble des nébuleuses a par conséquent un caractère général.

L'équation (3) montre que les divers coefficients $a_{\mu\nu}$ sont du même ordre de grandeur. D'après (1) ou (27) les vitesses transversales des nébuleuses sont du même ordre de grandeur que les vitesses radiales, ce qui permet d'estimer l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire de la précession. On trouve que celle-ci est très faible, de l'ordre du millième de seconde d'arc par siècle. Elle donne néanmoins lieu à des vitesses linéaires transversales élevées pour les nébuleuses situées à grande distance de l'axe cosmique.

---

(1) La vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. — *Ciel et Terre* (Bull. de la Soc. belge d'Astronomie), t. LVII, n° 4, avril 1941, p. 151.

La récession des nébuleuses extra-galactiques. — *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, t. LXI, 1947. Série I. 3e fasc. Décembre 1947, p. 229.

A ce mouvement de précession se superpose simultanément le mouvement relatif correspondant à la vitesse $\overline{u}$ (équations 25) qui peut se décomposer en un mouvement radial et un mouvement transversal. Si, comme les observations astronomiques semblent l'indiquer, la vitesse radiale v_r considérée macroscopiquement, est positive, c'est-à-dire de récession, dans toutes les directions, le diagramme de $\sqrt{\frac{r}{v_r}}$ est un ellipsoïde, comme on le verrait aisément. Par contre celui de $\sqrt{\frac{v_r}{r}}$ est un ovaloïde. Quant au mouvement transversal, c'est un déplacement angulaire périodique ou apériodique, direct ou rétrograde par rapport à la précession.

Si enfin nous considérons les trajectoires non plus dans des axes coordonnés solidaires de la voie lactée mais dans des axes liés au système des masses lointaines (1) prédominantes pour la création du champ cosmique, leur forme sera fort différente. Au lieu d'être très divergentes elles seront presque parallèles à cause de la grande vitesse de la voie lactée qui s'ajoute alors à celle des nébuleuses puisque la voie lactée était solidaire des anciens axes. Les trajectoires seront tendues, légèrement divergentes et faiblement hélicoïdales avec de minimes variations de courbure et de torsion.

Comme les vitesses des nébuleuses dans les axes de référence liés aux masses lointaines sont, ainsi que nous l'avons montré antérieurement, comparables à celle de la lumière, l'addition, dont question ci-dessus, de la vitesse de la voie lactée à la vitesse relative des nébuleuses par rapport à la voie lactée devra s'opérer conformément à la cinématique de la relativité, ce qui aura pour effet d'accentuer le parallélisme des trajectoires telles qu'elles sont vues dans les axes liés aux masses lointaines.

En ce qui concerne la voie lactée, considérons deux nébuleuses situées l'une dans la direction de la vitesse de la voie lactée et l'autre dans la direction opposée. Comme elles s'éloignent toutes deux de la voie lactée, la première va plus vite et la seconde plus lentement que la voie lactée. La vitesse va donc en croissant dans la direction de la vitesse de la voie lactée et par conséquent cette dernière est en accélération et descend donc, à l'époque cosmique actuelle, la pente du potentiel. Quand elle la remontera un rapprochement succédera à la récession.

---

(1) La répartition macroscopique des nébuleuses extra-galactiques. — *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, t. LX, (1940-1946). Série I, 3e fasc. Juillet 1946, p. 121.

Le caractère si énigmatique de la récession des nébuleuses et de leur apparente répulsion croissant avec la distance s'explique donc du fait que dans nos axes de référence liés à la voie lactée nous n'observons que les différences vectorielles entre la vitesse des nébuleuses et celle de la voie lactée, et au surplus les composantes transversales de ces différences passent inaperçues. On conçoit que plus les nébuleuses seront éloignées de la voie lactée et plus les différences de vitesse seront grandes, étant en relation avec l'éloignement des trajectoires par rapport à celle de la voie lactée. Dans les axes de référence liés aux masses lointaines engendrant le champ cosmique, l'ensemble des trajectoires forme une famille de courbes qui ne présente aucune anomalie par rapport à la voie lactée, alors que dans les axes solidaires de celle-ci la voie lactée est privilégiée et constitue un point singulier asymptotique des trajectoires.

Si nous retournons maintenant aux coordonnées solidaires de la voie lactée adoptées primitivement pour les relations (1), nous voyons que le mouvement des nébuleuses est, en première approximation, déterminé par les 9 coefficients $a_{\mu\nu}$, lesquels fixent les racines k_1 k_2 et k_3 de la cubique (5) et l'orientation du trièdre de référence des coordonnées normales utilisées pour exprimer les trajectoires. Aux 9 coefficients $a_{\mu\nu}$ il est commode de substituer les trois coefficients fixant l'orientation des axes de l'ellipsoïde de la vitesse irrotationnelle $\overline{u}$, conjointement avec les 6 coefficients A_{11}, A_{22}, A_{33}, Ω_1, Ω_2 et Ω_3 des équations (27).

Les 238 paramètres de l'espace-temps osculateur, laissés indéterminés pour ne pas préjuger de sa métrique, sont donc ainsi ramenés aux 6 coefficients susdits.

Pour un espace-temps osculateur du 4e ordre on aurait des termes de correction pour les composantes de la vitesse (équations 1), à savoir 9 termes quadratiques supplémentaires pour chacune des composantes mais sans introduction d'un terme du 1er degré contenant le temps x_4 ni d'un terme de 2d degré en x_4^2. Cela provient de ce que la chute libre de la voie lactée, en annulant en permanence le champ gravifique à l'origine des coordonnées spatiales, atténue l'effet du temps sur l'évolution du système des nébuleuses par l'élimination à tout instant de son mouvement d'ensemble. L'osculation au 4e ordre maintient ainsi comme termes principaux ceux des équations (1) sans leur ajouter un terme du 1er degré en x_4, ce qui était d'ailleurs à prévoir.

En ce qui concerne les 6 coefficients précités on peut déduire des observations astronomiques, d'après lesquelles il semble y avoir récession dans toutes les directions, que les coefficients A_{11}, A_{22} et

A_{33} sont tous trois positifs. La vitesse radiale v_r en effet, pour expression d'après (25) :

$$v_r = (U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3)\frac{1}{r} = (A_{11}X_1^2 + A_{22}X_2^2 + A_{33}X_3^2)\frac{1}{r} \quad (31)$$

qui sera positive dans toutes les directions si A_{11}, A_{22} et A_{33} le sont.

Dans ce problème des nébuleuses il n'est pas surprenant que l'on arrive à de grands mouvements. Les distances cosmiques actuellement mesurées en astronomie impliquent en effet inéluctablement l'existence de masses bien supérieures à celles observées jusqu'à présent. Ces masses lointaines comportent la création de différences de potentiel considérables d'où résultent nécessairement par l'effet de durées immenses, des mouvements très rapides sur de grandes étendues.

Sur le calcul des véhicules redresseurs à deux lentilles identiques

PAR

M. A. BIOT

1. Le problème. — Certaines petites lunettes redresseuses sont établies suivant le schéma de la figure 1, dans lequel on suppose les lentilles minces.

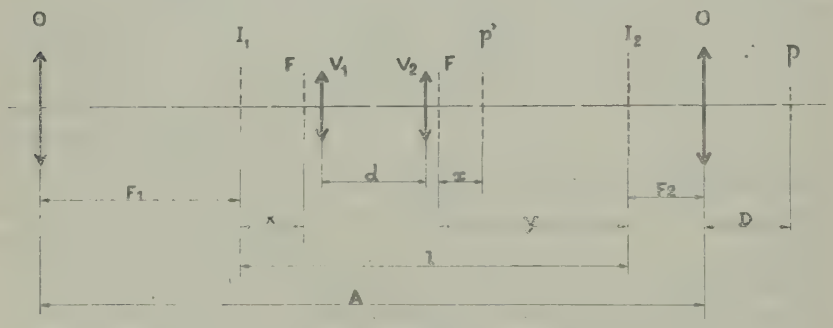


Fig. 1.

O est l'objectif de la lunette; les lentilles V_1 et V_2, identiques entre elles, constituent le véhicule; o est l'oculaire composé également de deux lentilles identiques entre elles et très rapprochées. Toutes ces lentilles sont achromatiques. I_1 est le plan de l'image que donne l'objectif dans son plan focal; I_2 le plan de l'image redressée par le véhicule — c'est également le plan focal de l'oculaire —; p est le plan de la pupille de sortie de la lunette, dans lequel se fait l'image à travers le système de l'objectif, pupille d'entrée; p' est le plan de l'image à travers le véhicule de la pupille d'entrée ou encore de l'image à travers l'oculaire de la pupille de sortie; enfin F_1F sont les plans focaux de l'ensemble qui constitue le véhicule.

Appelons :

F_1 : la distance focale de l'objectif;

f : la distance focale d'une des lentilles du véhicule;

F_2 : la distance focale de l'oculaire;

g : le grossissement total;

g_1 : le grossissement du véhicule;

g_2 : le grossissement F_1/F_2;

A : la longueur totale de la lunette;

l : la longueur du transport, distance des plans I_1I_2;

d : la distance entre les lentilles du véhicule;

D : la distance comprise entre l'oculaire et la pupille de sortie.

Nous nous proposerons de déterminer les éléments l, f et d, les autres étant supposés connus.

Appelons encore, pour raison de commodité :

F : la distance focale du véhicule;

X : la distance comprise entre le plan I_1 et la plan focal du véhicule le plus voisin de I_1;

Y : la distance comprise entre le second plan focal du véhicule et I_2;

x : la distance comprise entre le second plan focal du véhicule et p'.

2. Les formules fondamentales.

On a d'abord :

$$A = F_1 + F_2 + l \tag{1}$$

Puis, successivement :

$$g = g_1 g_2 = g_1 \frac{F_1}{F_2} \tag{2}$$

$$X = \frac{F}{g_2} \qquad Y = F g_2 \tag{3}$$

On tire de (2) :

$$g_2 = g_1 \frac{F_2}{F_1} \tag{4}$$

et, de (3) et (4) :

$$X = \frac{F F_1}{F_2 g} \qquad Y = \frac{F F_2}{F_1} g \tag{5}$$

Remarquant ensuite que la distance comprise entre V_1 et le plan focal le plus voisin du véhicule vaut :

$$F\left(1 - \frac{d}{f}\right),$$

On a :

$$l = X + Y + d + 2F\left(1 - \frac{d}{f}\right)$$

relation que l'on peut écrire en utilisant les relations (5)

$$l = \frac{FF_1}{F_2 g} + \frac{FF_2}{F_1} g + d + 2F\left(1 - \frac{d}{f}\right) \qquad (6)$$

D'un autre côté, on peut écrire, par rapport au véhicule

$$(X + F_1)x = F^2$$

d'où

$$x = \frac{F^2}{X + F_1} = \frac{F^2 F_2 g}{F_1 F_2 g + FF_1}$$

et

$$Y - x = \frac{FF_2}{F_1} g - \frac{F^2 F_2}{F_1 F_2 g + FF_1} g = \frac{FF_2^2 g^2}{F_1 F_2 g + FF_1}$$

Enfin, on a aussi, par rapport à l'oculaire,

$$(Y - x)(D - F_2) = F_2^2$$

Remplaçant dans cette égalité $Y - x$ par sa valeur, on a facilement :

$$F = \frac{F_1 F_2 g}{g^2(D - F_2) - F_1} \qquad (7)$$

Les relations (1), (6) et (7) expriment toutes les conditions du problème tel que nous l'avons posé.

3. Solution des équations. — La relation (7) donne immédiatement F en fonction de quantités connues. On remarquera que ni A ni l n'y interviennent.

(1) donne aussi immédiatement l.

Il reste à résoudre le système :

$$l = \frac{FF_1}{F_2 g} + \frac{FF_2}{F_1} g + d + 2F\left(1 - \frac{d}{f}\right)$$

$$F = \frac{f^2}{2f - d}$$

suivant f et d.

Posons :

$$M = -\left[l - \left(\frac{FF_1}{F_2 g} + \frac{FF_2}{F_1} g + 2F\right)\right]$$

Il vient :

$$d = \frac{Mf}{2F - f} \qquad (8)$$

Introduisons cette valeur dans la deuxième des équations du système.

Nous trouvons :

$$f = 2F - \sqrt{FM} \qquad (9)$$

l'autre racine de l'équation étant à rejeter.

Les équations (1), (7), (8) et (9) résolvent le problème proposé.

Séparation par une onde sonore des constituants d'un mélange de gaz de masses différentes

PAR

Ph. PASSAU

Aspirant F. N. R. S.

La présence d'une hétérogénéité dans les conditions physiques d'un mélange de gaz, entraîne une variation de la composition du mélange, bientôt compensée par la diffusion naturelle des constituants. Cet effet a été découvert par S. Chapman (1) et D. Enskog (2) de manière indépendante, voici trente ans. L'existence d'un gradient de température donne lieu au phénomène de thermodiffusion qui a trouvé une application intéressante comme méthode de séparation des isotopes.

Les méthodes actuelles de séparation des isotopes présentent toutes un des deux inconvénients suivants qui s'excluent mutuellement : ou bien, la méthode possède un haut facteur de séparation, mais les quantités qu'il est possible d'obtenir sont faibles; ou bien, elle fournit un mélange isotopique peu différent du mélange initial mais le rendement de l'opération est élevé. Les méthodes du premier groupe opèrent soit sur des ions, un à un (spectrographe de masse), soit sur des mélanges gazeux à basse pression (pompes de Hertz en cascade). Par contre, la méthode d'échange chimique (Urey) permet de produire par tonnes des produits enrichis dans l'un ou l'autre isotope, mais nécessite une installation industrielle difficilement réalisable en laboratoire. Elle est intéressante pour une usine qui se spécialiserait dans la fourniture de produits isotopiques aux instituts de recherches biologiques ou métallurgiques.

La méthode de thermodiffusion a été très étudiée tant au point de vue théorique (Furry 3) qu'expérimental (Clusius 4). Elle offre

l'avantage de permettre l'utilisation de pressions de 0.1 à 10 atm (5), mais elle se limite pratiquement aux gaz, bien que des essais en phase liquide aient donné des résultats (6). Il faut donc utiliser un composé chimique gazeux, et celui-ci n'est pas toujours stable dans tout le domaine de température nécessaire pour créer le gradient optimum. Par contre un tel corps pourra ne pas être altéré par une variation de pression; et ceci suggère une autre technique de séparation, puisqu'un gradient de pression modifie la composition d'un mélange gazeux (Chapman). Ceci a été tout d'abord appliqué par Beams (7) dans les centrifugeuses à gaz où règne un gradient de pression stationnaire, méthode souvent combinée avec un échange chimique (centrifugeuses à vapeur).

Il est difficile de concevoir une autre réalisation technique d'un gradient de pression stationnaire : les chutes de pression dans les conduites sont trop faibles pour obtenir une séparation effective. Mais une onde sonore fait régner un gradient de pression alternatif dans le milieu où elle se propage, et une séparation des constituants s'y manifeste : S. Chapman (1) et N. Marinesco (8) remarquent en effet, qu'un son qui se propage dans l'air chasse l'azote devant le front d'onde.

Ce phénomène ne pourrait se produire dans une onde stationnaire (non amortie) où à chaque demi-période les effets de séparation, opposés, se compensent exactement. Mais si les forces visqueuses sont importantes, il s'établira un état d'équilibre, et la composition du mélange présentera une variation périodique dans l'espace. Une telle distribution des concentrations a été tout récemment mise en évidence par Frei et Schiffer (9).

Un argument d'ordre thermodynamique milite en faveur de la réversibilité incomplète de ce phénomène. L'amortissement des ondes sonores dans les mélanges de gaz comporte à côté des causes classiques — viscosité, rayonnement, et conductibilité thermique — des termes supplémentaires introduits par la diffusion (Rocard 10). Un de ces termes, dû aux modifications des équations de mouvement, est proportionnel au cube de la fréquence et devient prépondérant aux hautes fréquences.

Le comportement d'un mélange gazeux soumis à irradiation ultrasonore a été étudié de manière expérimentale, et ce sont les premiers résultats de cette étude qui font l'objet de cette note.

1. Considérations théoriques.

En développant la théorie cinétique des mélanges de gaz, S. Chapman (11) a établi une relation entre, d'une part, les vitesses de diffusion u_i et les concentrations c_i des constituants présents, et d'autre part, les gradients de pression $\delta p / \delta x$ et de concentration $\frac{\delta c_i}{\delta x}$ au sein du mélange gazeux, relation qui s'écrit dans le cas deux de gaz :

$$(1) \qquad c_1 c_2 (u_1 - u_2) = - D_{12} \frac{\delta c_1}{\delta x} + D_p \frac{1}{p} \frac{\delta p}{\delta x}$$

dans laquelle seuls ont été retenus le terme relatif à la diffusion naturelle des constituants, caractérisée par le coefficient D_{12} et celui qui se rapporte à l'existence d'un gradient de pression. Le coefficient de « barodiffusion » D_p a pour expression :

$$D_p = D_{12} \frac{m_1 - m_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

m_1, m_2 : masses respectives des molécules des deux gaz.

Ainsi dans une onde sonore où existe un gradient de pression alternatif, il se produira une diffusion des constituants du mélange porteur de l'onde, mais dans des sens opposés à chaque demi-période. Y a-t-il réversibilité totale du phénomène ? Il en sera ainsi dans une onde stationnaire, où deux ventres de pression successifs délimitent une cellule dont les frontières sont infranchissables par les molécules qui y diffusent. Une séparation locale pourra exister cependant dans des milieux très visqueux, comme nous l'avons signalé plus haut (9).

Dans une onde progressive une séparation doit se produire : ici, en effet, en un endroit quelconque sous l'action du gradient de pression qui va croissant jusqu'à sa valeur maximum, les molécules du gaz sont entraînées dans le sens de la propagation de l'onde, mais les molécules légères sont entraînées plus loin et comme chassées devant le front d'onde, laissant derrière elles un mélange enrichi dans le gaz le plus lourd. A la demi-période suivante, le gradient de pression est inversé et il y a une succion des molécules vers l'arrière, qui ne compense cependant pas l'effet de la première diffusion, car la composition de départ en cet endroit n'est plus la même. Ici une distance égale à une longueur d'onde constitue une cellule de diffusion dans laquelle se produit un transport, minime il est vrai, du gaz léger vers le front

d'onde; et la colonne où se propage l'onde peut être regardée comme un empilement de cellules de séparation dont l'effet est cumulatif.

Pour rendre compte du phénomène de façon quantitative, il suffit d'associer à la relation de Chapman (1) des relations de continuité du gaz et l'on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\delta c_1}{\delta t} = D_{12} \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta c_1}{\delta x} - \frac{D_p}{D_{12}} \frac{1}{\bar{p}} \frac{\delta p}{\delta x}\right]$$

dont l'intégration approchée se fera dans chacune des cellules en supposant qu'on atteint l'état d'équilibre que l'on aurait si le gradient de pression se maintenait dans un sens, puis dans l'autre, et en faisant le bilan.

2. Dispositif expérimental.

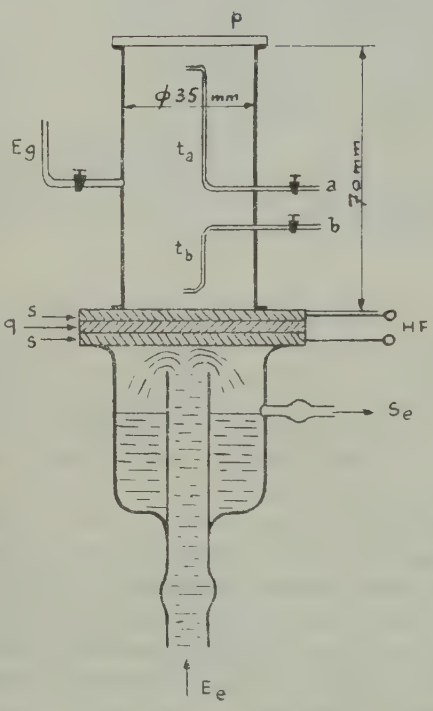
La réalisation d'une onde ultrasonore de grande puissance a été obtenue en utilisant un sandwich quartz-acier suivant la technique de Langevin (12) monté en résonateur (13).

Le sandwich utilisé est constitué d'un ensemble de morceaux de quartz taillés perpendiculairement à l'axe électrique, de 3,5 mm d'épaisseur et assemblés de manière à former un disque de 60 mm de diamètre. Ils sont serrés entre deux disques d'acier de 2 mm d'épaisseur bien dressés. Pour éviter tout film d'air dans le dispositif, de l'huile de transformateur, de même pouvoir diélectrique que le quartz, imbibe les interstices et les gradients de champ électrique sont évités.

Ce sandwich est monté en série avec une bobine de self formant un circuit résonant distinct, accordé à la fréquence propre du système piézoélectrique. Il est couplé par induction, et de manière très serrée, au circuit de plaque de l'émetteur haute fréquence, qui est constitué d'un montage classique Hartley, et possède une puissance de 2 kW. Ce type de couplage, préconisé par Salisbury et Porter (14), donne un excellent ultrasonore.

La source d'ultrasons est disposée à la base d'une colonne de diffusion (un tube de pyrex de 3,5 cm de diamètre et d'une hauteur de 7 cm) munie de sas pour soutirer le gaz, comme il est représenté sur la figure (p. 44). La colonne est terminée par une impédance acoustique de manière à rendre l'onde progressive. Mais en fait, par suite de l'amortissement considérable des ondes ultrasonores dans les milieux gazeux (15), l'onde établie n'est certainement pas stationnaire.

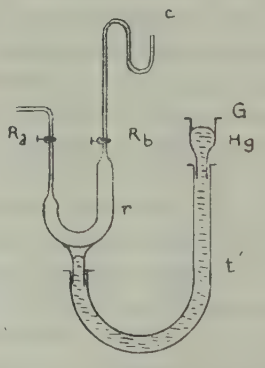
Appareil de diffusion



Légende

s : plaque d'acier
q : morceaux de quartz } Sandwich.
a, b : prises de gaz vers le sas
t_a, t_b : tubes capillaires
p : plaque de verre
HF : alimentation haute fréq^ce
Eg : entrée du gaz
E_e : entrée d'eau
S_e : sortie d'eau

Sas à mercure



Légende

Ra Robinet amont
Rb Robinet aval
c extrémité capillaire
t' : tuyau en caoutchouc
G godet à Hg
r : sas à gaz

Le sandwich s'échauffe à cause des pertes ohmiques et des courants tourbillonnaires; sa réfrigération est réalisée par une aspersion continue d'eau sur l'électrode inférieure, système d'une bonne efficacité.

L'analyse des gaz se fait par une méthode d'absorption appropriée, dans une microburette.

3. Résultats expérimentaux.

L'étude a porté sur des mélanges d'hydrogène et d'anhydride carbonique.

L'allure générale du phénomène observé est la suivante : au début, on obtient à 6 mm de la source d'ultrasons, un enrichissement en H_2, correspondant vraisemblablement au transport devant le front d'onde, de l'hydrogène des couches situées en dessous de cette prise de gaz. Une variation en sens inverse se produit ensuite Pendant les premières heures on observe un enrichissement progressif en CO_2 au voisinage de la source d'ultrasons, et un enrichissement complémentaire en H_2 à la partie supérieure de la colonne. Mais, et pour des raisons encore inexpliquées *, après 3 à 5 heures, des oscillations de la concentration d'une période de 4 heures prennent naissance et se poursuivent d'une manière complémentaire aux deux extrémités du tube.

L'effet de séparation n'est pas dû à des causes thermiques, ni à des erreurs de titrage. Des expériences de contrôle, avec effet thermique, mais sans ultrasons, l'ont démontré de façon certaine.

Des expériences faites il résulte :

1° Si on allonge le tube de diffusion, la partie supérieure se comporte comme réservoir de gaz : la différence de concentration observée en cet endroit, est moindre pour une colonne plus longue.

2° Les expériences faites avec des mélanges à 50 % d'H_2 manifestent une séparation plus grande que celles effectuées avec des mélanges à 30 %, comme attendu théoriquement.

3° Le mélange à 50 %, qui a été le plus étudié, présente une variation de concentration qui atteint 10 % de la valeur initiale. Ainsi dans une expérience la concentration en CO_2 est passée à la base du tube de 51 % à 56 ½ %. Ceci correspond aux estimations théoriques, compte tenu de la valeur de la surpression réalisée.

---

* Ce sont peut-être des oscillations de relaxation dues à une instabilité d'origine thermique, provoquée par la variation de concentration, ainsi qu'il nous la été signalé.

4. Conclusion.

La barodiffusion est un phénomène intéressant, susceptible d'application comme méthode de séparation des constituants de mélanges de gaz de masses différentes, et mérite une étude plus approfondie basée sur une mise au point, entre autres, d'une méthode adéquate de titrage continu.

Il m'est agréable de remercier ici Monsieur le Professeur Marc de Hemptinne pour les conseils et les suggestions qu'il m'a donnés au cours de ce travail, effectué sous sa direction. Je tiens également à remercier le Fonds National de la Recherche Scientifique pour le mandat d'Aspirant grâce auquel j'ai pu me consacrer à cette recherche.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Chapman, *Proc. Roy. Soc.*, A 93 — pp. 1 — 1917.
2. D. Enskog, « Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen » Dissertation. Uppsala.
3. Furry et C. Jones, *Rev. Mod. Phys.*, 18 — p. 151 — 1946.
4. K. Clusius et G. Dickel, *Naturwissensch.*, 26 — pp. 546 — 1938.
5. W. Groth, *Die Chemische Technik*, 17 — pp. 29 — 1944.
6. S. R. de Groote, L'effet Soret. Thèse. Amsterdam.
7. J. W. Beams et F. B. Haynes, *Phys. Rev.* 49 — pp. 644 — 1936.
8. N. Marinesco, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, N° 522.
9. H. Frei et M. Schiffer, *Phys. Rev.*, 71 — pp. 555 — 1947.
10. Y. Rocard, *Ann. de Phys.*, 1927.
11. S. Chapman et T. Cowling, « The mathematical theory of non-uniform gases », Cambridge Press. Chap. 3.
12. Biquard, *Revue d'Acoustique*, 1 — pp. 93 — 1932
    2 — pp. 288 — 1933
    3 — pp. 123 — 1934.
13. W. G. Cady, « Piezolectricity », Chap. XVII et p. 428.
14. W. W. Salisbury et W. Porter, *Rev. Sc. Instr.*, 10 — pp. 269 — 1939.
15. Bömmel, *Helv. Phys. Acta*, 18 — pp. 3 — 1945.

Phénomènes d'adsorption dans les solutions colloïdales

PAR

M. AUGUSTIN BOUTARIC et Mlle SIMONE FABRY.

OBJET DU TRAVAIL.

On a souvent signalé qu'à l'état colloïdal, la matière se trouvant dans un grand état de dispersion et par suite présentant une surface spécifique considérable, devait posséder des propriétés adsorbantes intenses. Tout récemment Mlle Charlotte Cohn [1] reprenant la même idée signale, qu'au lieu de réaliser l'adsorption, comme on le fait habituellement, sur des solides en poudre fine, « il est théoriquement préférable de la réaliser sur des particules d'un hydrosol beaucoup plus petites que les grains d'une poudre. La surface de contact étant plus grande et le contact meilleur la réaction sera plus rapide et plus complète avec une quantité d'adsorbant moindre ». Le même auteur ajoute que « pour achever la séparation l'hydrosol sera ensuite floculé et centrifugé ». Ainsi d'après l'auteur que nous venons de citer, l'adsorption exercée par les granules d'une solution colloïdale serait particulièrement intense, la floculation ayant seulement pour effet de la rendre plus rapide et plus complète. Dans des recherches déjà anciennes [2], l'un de nous, étudiant la fixation de substances qui existent à l'état moléculaire, telles que l'éosine, l'acide picrique, le violet V, le rouge orangé G, sur les granules de divers hydrosols, établissait : 1°) que tant que les granules conservent leur individualité dans le sol, leur pouvoir adsorbant vis-à-vis de ces substances est pratiquement nul; 2°) qu'il ne fixe ces substances qu'à l'état floculé, et qu'alors cette fixation se produit exactement de la même manière lorsqu'on met la solution de ces substances au contact de granules déjà floculés ou lorsqu'on provoque la floculation dans le mélange de colloïde et de matière colorante.

L'étude de la fixation, sur les granules de divers hydrosols, de matières colorantes se trouvant en solution à l'état colloïdal (rouge neutre, brun Bismark, rouge Congo), avaient permis au contraire de constater une adsorption de la matière colorante sur les granules de l'hydrosol, cette adsorption étant rendue plus intense par floculation de l'hydrosol.

Il résultait donc de ces expériences que si les colloïdes peuvent être considérés comme doués de propriétés adsorbantes intenses lors-

---

(1) Charlotte COHN. — *C. R. Académie des Sciences*, Paris, t. 223, 1946, p. 1022.

(2) A. BOUTARIC et F. BANÈS. — *C. R. Académie des Sciences*, Paris, t. 186, 1928, p. 1003 et t. 187, 1928, p. 117.

qu'on les prend à l'état floculé, il n'en est plus ainsi lorsqu'on les considère à l'état de sols. Dans ces conditions, ils ne sont capables de fixer avec quelque intensité que les corps se trouvant eux-mêmes à l'état colloïdal. La fixation par les granules d'un hydrosol d'une matière colloïdale dispersée dans l'hydrosol dépend de caractères spécifiques propres aux granules fixateurs et à la matière destinée à être adsorbée. Parmi ces caractères les signes électriques des granules en présence jouent un rôle prépondérant. Lorsque les signes de ces granules sont opposés, pour certaines concentrations des deux colloïdes en présence, il peut se produire une floculation réciproque de la totalité des deux colloïdes qui entraîne une fixation complète du corps adsorbé par l'adsorbant. Il nous a paru intéressant de reprendre l'étude de l'ensemble de la question en envisageant l'adsorption exercée par les granules de divers hydrosols de signes connus sur un certain nombre de substances colorées se trouvant en solution soit à l'état d'ions organiques de structure plus ou moins complexe, soit à l'état de granules colloïdaux.

Méthode d'étude.

Des expériences préalables relatives à la fixation de matières colorantes se trouvant en solution à l'état d'ions simples et n'étant pas arrêtées par des ultra-filtres de collodion, ont permis de reconnaître qu'une matière colorante restée libre dans l'hydrosol peut être dosée par une méthode spectrophotométrique portant sur la densité optique de l'hydrosol additionné de la matière colorante. Il suffit pour cela d'opérer sur une région du spectre pour laquelle la matière colorante présente une bande d'absorption. Désignons par δ_0 la densité optique dans cette région de la solution de matière colorante de concentration c, par δ_1 la densité optique de l'hydrosol de concentration s et par δ la densité optique d'un mélange à volumes égaux de la solution de matière colorante de concentration $2c$ avec l'hydrosol de concentration $2s$, ce qui fournit une solution mixte ou la matière colorante est introduite sous la concentration c et l'hydrosol sous la concentration s. Si la matière colorante ne se fixe pas sur les granules de l'hydrosol, on devra avoir :

$$\delta = \delta_0 + \delta_1$$

si au contraire la matière colorante se fixe sur les granules de l'hydrosol, on aura :

$$\delta < \delta_0 + \delta_1$$

la différence : $(\delta_1 + \delta_0) - \delta$, représente la diminution de densité optique provenant de la matière colorante fixée sur les granules de l'hydrosol et permet de calculer la quantité de matière colorante adsorbée, à condition d'avoir établi préalablement, pour la radiation

utilisée, la courbe représentant la variation de densité optique de la matière colorante en fonction de la concentration.

Pour éviter toute influence perturbatrice provenant d'impuretés ioniques, les colloïdes utilisés comme adsorbants ont tous été longuement purifiés par dialyse, même dans les cas où, comme pour le sulfure d'arsenic et les hydrosols de résine-mastic ou de gomme-gutte, on peut penser que ces impuretés sont insignifiantes. Les matières colorantes colloïdales ont également été purifiées par dialyse. Pour la mesure de la densité optique nous avons utilisé l'électrophotomètre de Meunier, dont les résultats ont été le plus souvent contrôlés par des mesures faites à l'aide du spectrophotomètre de Jobin et Yvon à observation visuelle.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

1) **Adsorption sur les granules de résine-mastic.**

L'hydrosol était obtenu par dilution dans l'eau distillée d'une solution alcoolique de résine-mastic. La concentration était de 0,98 g/litre ($2s = 0,98$).

a) *Matières colorantes à ions ou granules électronégatifs.*

Avec l'acide picrique, la liqueur de Fehling, l'éosine, l'uranine, aussi bien qu'avec le rouge diamine, le bleu de méthyle et l'induline à ions ou granules colorés électronégatifs, on n'observe aucune fixation de la matière colorante sur les granules de résine-mastic. Dans le tableau I on n'a fait figurer que les résultats relatifs à l'acide picrique, à l'éosine, au rouge diamine, à l'induline.

TABLEAU I

Colorants	c *mg p.100 cm³*	δ_0	δ_1	$\delta_0 + \delta_1$	δ
acide picrique	100	0,07	0,49	0,56	0,56
	200	0,20		0,69	0,68
	300	0,35		0,84	0,82
	500	0,50		0,99	0,97
éosine	0,28	0,12	0,33	0,45	0,45
	0,63	0,21		0,54	0,53
	2,10	0,36		0,69	0,66
	3,50	0,48		0,81	0,78
rouge diamine	0,4	0,10	0,60	0,70	0,70
	0,80	0,22		0,82	0,82
	1,60	0,40		1,00	0,98
	3,20	0,69		3,89	3,85
induline	0,28	0,07	0,26	0,33	0,33
	0,70	0,20		0,46	0,46
	2,80	0,66		0,92	0,92
	7,00	1,57		2,11	2,12

Comme le montrent les résultats rassemblés dans le tableau I, pour une faible concentration en matière colorante, δ est rigoureusement égal à $\delta_0 + \delta_1$; cependant, pour les fortes concentrations en matière colorante, on observe parfois que δ devient très légèrement inférieur à $\delta_0 + \delta_1$.

b) *Matières colorantes à ions ou granules électropositifs.*

Avec le chlorure de nickel, l'eau céleste, le bleu de méthylène, dont les ions colorés sont positifs, on n'observe aucune fixation. Ce résultat indiqué par l'égalité de δ et $\delta_0 + \delta_1$ peut être confirmé en ultrafiltrant la suspension de résine-mastic additionnée de chlorure de nickel, ce qui a pour effet d'arrêter les granules colloïdaux; on constate que la solution ultrafiltrée renferme tout le chlorure de nickel introduit, sa densité optique étant égale à δ_0. Il n'en est plus ainsi avec le rouge neutre ou le bleu victoria, matières colorantes se trouvant dispersées à l'état de micelles à granules colloïdaux positifs. Dans ce cas on constate que δ est nettement inférieur à $\delta_0 + \delta_1$ pour toutes les concentrations (voir tableau II).

TABLEAU II

Colorants	c *mg p. 100 :m³*	δ_0	δ_1	$\delta_0+\delta_1$	δ
Cl^2Ni	$0{,}65.10^4$	0,03	0,41	0,44	0,44
	$3{,}25.10^4$	0,14		0,55	0,55
	$6{,}5\ .10^4$	0,27		0,68	0,68
	$13{,}0\ .10^4$	0,56		0,97	0,96
bleu de méthylène	0,16	0,20	0,19	0,39	0,39
	0,32	0,40		0,59	0,60
	1,20	0,76		0,95	0,95
	2	0,90		1,09	1,08
rouge neutre	0,28	0,16	0,30	0,46	0,40
	0,56	0,32		0,62	0,54
	1,4	0,65		0,95	0,83
	2,1	0,88		1,18	0,98
bleu victoria	1,8	0,41	0,19	0,60	0,46
	3,0	0,60		0,79	0,58
	6,0	1,17		1,36	1,09
	9	1,59		1,78	1,51

2) **Adsorption sur les granules d'hydrate d'alumine.**

L'hydrate d'alumine a été préparé par action de l'ammoniaque sur une solution de chlorure d'aluminium et dialysé jusqu'à ce que la

dialyse n'élimine plus aucune trace d'ions chlore. Le sol ainsi obtenu est aussi transparent que l'eau et sa densité optique est égale à 0.

a) *Matières colorantes à ions ou granules électro-négatifs.*

L'acide picrique, le bichromate de potassium, le permanganate de potassium, l'éosine, l'uranine, qui, en solution, existent à l'état d'ions électronégatifs, ne se fixent pas sur les granules d'alumine ($\delta = \delta_0 + \delta_1$) c'est-à-dire ici $\delta = \delta_0$. Au contraire, on observe une fixation nette avec le rouge diamine, le bleu de méthyle et l'induline ($\delta < \delta_0 + \delta_1$) qui se réduit ici à $\delta < \delta_0$. C'est ce qu'on peut constater sur les résultats du tableau III.

TABLEAU III

Colorants	c *mg p. 100 cm³*	δ_0	δ_1	$\delta_0 + \delta_1$	δ
permanganate de potassium	2,5	0,24	0	0,24	0,24
	5,0	0,46		0,46	0,46
	10	0,82		0,82	0,81
	15	1,20		1,20	1,19
uranine	0,3	0,11	0	0,11	0,11
	1,2	0,33		0,33	0,33
	2,4	0,52		0,52	0,51
	3,0	0,58		0,58	0,58
bleu de méthyle	0,32	0,45	0	0,15	0,09
	0,56	0,20		0,20	0,11
	0,80	0,37		0,37	0,23
	1,60	0,71		0,71	0,46
rouge diamine	0,4	0,09	0	0,09	0,05
	0,64	0,17		0,17	0,08
	0,8	0,23		0,23	0,11
	1,6	0,41		0,41	0,23

b) *Matières colorantes à ions ou granules électropositifs.*

Les expériences ont porté sur le bleu de méthylène le bleu victoria, le rouge neutre. Dans tous les cas on a très sensiblement $\delta = \delta_0 + \delta_1$, c'est-à-dire : $\delta = \delta_0$, sauf pour de très fortes concentrations en matières colorantes pour lesquelles δ peut être très légèrement inférieur à δ_0 Dans le tableau IV nous donnons les résultats relatifs au bleu de méthylène et au bleu victoria.

TABLEAU IV

Colorants	c *mg p. 100 cm³*	δ_0	δ_1	$\delta_0+\delta_1$	δ
bleu de méthylène	0,60	0,22	0	0,22	0,22
	0,96	0,40		0,40	0,40
	1,62	0,66		0,66	0,66
bleu victoria	0,6	0,12	0	0,12	0,12
	1,5	0,30		0,30	0,29
	3,0	0,54		0,54	0,52
	3,6	0,70		0,70	0,66

3) **Adsorption sur les granules de silice.**

Le sol de silice a été préparé par l'action d'une solution d'acide chlorhydrique N /10 sur un sol de silicate de soude à 5 pour 100 suivie d'une longue dialyse. Dans ces conditions la densité optique δ est pratiquement égale à 0. On a constaté que le permanganate de potassium, le bichromate de potassium, le chlorure de nickel, ne se fixent aucunement sur les granules de silice ($2s$ = 3 g p. litre). Dans le tableau V nous donnons à titre indicatif les résultats relatifs à MnO^4K.

TABLEAU V

Colorant	c *mg p. 100 cm³*	δ_0	δ_1	$\delta_0+\delta_1$	δ
MnO^4K	1	0,11		0,11	0,11
	2	0,20	0	0,20	0,20
	5	0,46		0,46	0,46
	10	0,82		0,82	0,82

Autres sols examinés. — Nous avons obtenu des résultats identiques notamment avec des sols de sulfure d'arsenic et de gomme-gutte.

Cas où l'on observe une floculation du sol.

Lorsqu'on provoque une floculation du sol en présence de matière colorante, on observe une fixation de cette matière colorante par les micelles floculées. Deux cas sont intéressants à envisager suivant que la floculation du sol se produit sous la seule action de la matière colorante ou qu'on provoque cette floculation par addition d'un électrolyte introduit dans le mélange du sol et de la matière colorante.

a) Si l'on introduit dans un sol d'alumine une concentration suffisante d'acide picrique, il se produit une floculation de l'hydrate d'alumine accompagnée d'une fixation de l'acide.

Les expériences ont été réalisées avec un sol d'hydrate d'alumine à 2 grammes par litre. Le tableau VI donne les valeurs de δ_0 et de δ, relatives à la fixation d'acide picrique

TABLEAU VI

c mg p. 100 cm³	δ_0	δ_1	$\delta_0+\delta_1$	δ	*Observations*
100	0,33	0	0,33	0,33	
150	0,36		0,36	0,36	pas de floculation
200	0,39		0,39	0,31	
350	0,44		0,44	0,38	floculation
500	0,48		0,48	0,43	

Il convient de signaler que pour une concentration en acide picrique voisine de celle qui provoque la floculation la densité optique δ du mélange, d'abord égale à δ_0, croît très lentement en fonction du temps : ainsi pour une concentration en acide picrique égale à 150 mg pour 100 cm³, la valeur de δ aussitôt après le mélange est égale à 0,36, ce qui montre qu'il ne se produit aucune fixation d'acide picrique sur les micelles colloïdales ; cette valeur se conserve une demi-heure, mais, au bout de 15 heures, la densité optique a légèrement augmenté et est devenue égale à 0,39, indiquant qu'en présence d'acide picrique sous la concentration envisagée, il se produit une évolution du colloïde vers la floculation. Un résultat analogue s'observe dans tous les cas où la matière colorante est introduite sous une concentration voisine de la concentration limite susceptible de produire la floculation.

Il en est ainsi pour une solution renfermant l'alumine sous la concentration $s = 3,5$ g par litre, l'éosine sous les concentrations :

$$c_1 = 4 \text{ mg p } 100 \text{ cm}^3 \ (\delta_0 = 0,36 \qquad \delta = 0,47)$$
$$\text{et } c_2 = 5 \text{ mg p } 100 \text{ cm}^3 \ (\delta_0 = 0,38 \qquad \delta = 0,53)$$

b) On observe encore une fixation de matière colorante lorsqu'on produit la floculation de la solution colloïdale renfermant la matière colorante par addition d'un électrolyte sous une concentration suffisante. L'expérience a été réalisée en ajoutant un sel à un mélange d'alumine et d'éosine ou de bleu de méthylène. Tant que la concentration saline est insuffisante pour provoquer la floculation, on n'observe aucune fixation de matière colorante ($\delta = \delta_0$) ; dès que la concentration saline détermine la floculation de l'alumine on observe après dépôt de l'alumine une densité optique δ de la matière colorante inférieure à δ_0. La diminution $\delta_0 - \delta$ de la densité optique renseigne sur la quantité d'éosine fixée sur l'alumine floculée. Le tableau VII se rapporte à des mélanges d'alumine, d'éosine ou de bleu de méthylène et de Cl K dans lesquels l'alumine se trouve sous la concentration $s = 1$ g p. litre, Cl K sous la concentration $\frac{3N}{4}$ et l'éosine ou le bleu de méthylène sous la concentration initiale c.

TABLEAU VII

c mg p. 100 cm³	éosine			bleu de méthylène		
	δ_0	δ	$\frac{\Delta c}{c}$	δ_0	δ	$\frac{\Delta c}{c}$
0,20	0,105	0,065	0,075	0,275	0,240	0,100
0,30	0,155	0,110	0,066	0,390	0,375	0,073
0,40	0,205	0,145	0,063	0,520	0,500	0,060
0,50	0,250	0,175	0,066	0,660	0,620	0,050
0,60	0,300	0,215	0,058	0,760	0,740	0,062

A condition d'avoir étalonné l'instrument de manière à connaître la courbe des densités optiques en fonction des concentrations, des mesures faites permettent de calculer la diminution de concentration Δc résultant de l'adsorption. On vérifie que les résultats obtenus obéissent sensiblement à la formule de Freundlich.

c) Dans les exemples précédents où la matière colorante a un poids moléculaire relativement peu élevé, la proportion du produit qui se fixe sur l'alumine durant la floculation est assez faible. On obtient des fixations beaucoup plus importantes en opérant avec des matières colorantes qui se trouvent en solution à l'état colloïdal. Nous avons utilisé le rouge diamine à granules négatifs et le bleu victoria à granules positifs. Ces matières se fixant très énergiquement on a dû opérer sur un sol d'alumine plus dilué ($s = 0{,}03125$ g p. litre).

TABLEAU VIII

c mg p.100 cm³	$\frac{\Delta c}{c}$ *rouge diamine*	$\frac{\Delta c}{c}$ *bleu victoria*
15	1 (adsorption totale)	0,975
20	1 »	0,978
25	1 »	0,980

L'adsorption est totale pour le rouge diamine et quasi totale pour le bleu victoria. Nous avons d'ailleurs vérifié que l'adsorption est la même lorsqu'on introduit la matière colorante dans le sol d'alumine préalablement floculé par Cl K.

Conclusion.

Il résulte des expériences rapportées dans ce travail que les granules dispersés dans un hydrosol n'ont qu'un pouvoir adsorbant très faible pour les substances dissoutes introduites dans l'hydrosol. Ils ne manifestent un pouvoir adsorbant intense qu'à l'état floculé, l'adsorption étant la même qu'on produise la floculation sur le mélange de l'hydrosol et de la substance dissoute ou qu'on introduise celle-ci dans l'hydrosol préalablement floculé.

(Faculté des sciences de Dijon
Laboratoire de Chimie-physique).

Azéotropes binaires orthobares que forment des oxydes avec des hydrocarbures

PAR

MAURICE LECAT

Ne reproduisons pas la liste des abréviations dont il est usé dans les travaux précédents (*).

ANHYDRIDE CARBONIQUE (— 79,1)

B	Éb. B	Δ	Éb. az.	δ	% A	M	Bibl.	
Éthane, C_2H_6	—88,6	9,5	(1)	—	55	—	(2)	[1]

(1) Azéotropie trouvée par interpolation, les pressions étant connues à différentes températures. (2) Kuenen, Bibl. Az. 494-498; ('97); Kuenen, Robson [507, p. 124/32] ('02).

OXYDE D'ÉTHYLÈNE (ÉPOXYÉTHANE) (10,75)

Butane norm. »	0,6	10,15	<0,0	>0,6	>5	—	—	[2]

Z. — Isopentane (27,95; 17,2), f. (c'est-à-dire : z. fortement positive).

FURANNE (31,7)

Isopentane	27,95	3,75	<27,0	>0,95	>8	5 : 0,4	o. s.	[3]

Z. — Isopropyléthylène (20,6; 11,1), f. [5 : 0,5].

OXYDE DE PROPÈNE (34,1)

Z. — Isopentane (27,95; 6,15), quasi-azéotropie positive.

OXYDE D'ÉTHYLE (ÉTHER) (34,6)

Isoprène	34,3	0,3	33,2	1,1	48	40 : 0,5	(1)	[4]
Pentane n. [ne	36,15	1,55	33,4	1,2	68	50 : 2,4	(2)	[5]
Triméthyléthylè-	37,1	2,55	34,2	0,4	85	60 : 0,2	(3)	[6]

(1) Bibl. 542, n° 1933; 568g, n° 63. — (2) 542, n° 1934. (3) *542, n° 1935.

(*) Cf. notamment « Azéotropes d'oxydes » (première partie), ces *Annales*, série I, t. LXI, 1947, p. 153. Voir aussi « Azéotropes d'esters et d'oxydes », *ibid.*, p. 255.

Z. — Diméthylallène as. (40,8; 6,2), q.-az. — Isopentane (27,95; 6,65), f. [20 : 1,7] (Bibl *542, n° 1932). — Isopropyléthylène (20,6; 14,0), m. [50 : 0,8]; cyclopentane (49 3; 14 7), m. [95 : 0,1]. — Divinyle (butadiène) (1; 33,6), l.; diisopropyle (58,0; 23,4), l. [95 : 0,3]; diallyle (60,1; 25,5), l. [97 : 0,15]. — Hexane n. (68,8; 34,2), t. l. [50 : 1,0]. — Benzène (80,15; 45,55), orthobare z. : Haywood [374, p. 995] ('99), Young [1248, p. 74] ('03); isothermes de tension de vapeur négatives : Zawidzki [1277] ('00), Schamhardt [934] ('08), Kireëv *et al.* [447j] ('33); z. l. n. [45 : — 0,3]. — Toluène (110,75; 76,15), t. l. n. [45 : — 1,1].

MÉTHOXYPROPANE (38,9)

Pentane n. [-ène	36,15	2,75	35,3	0,85	22	20 : 1,8	*568*g*	[7]
Triméthyléthyl-	37,1	1,8	36,3	0,8	25	50 : 0,5	»	[8]

Z. — Isoprène (34,3; 4,6), q.-az. — Isopentane (27,95; 10,95), m. [10 : 0,8].

MÉTHYLAL (42,3)

Isopentane	27,95	14,35	27,0	0,95	23	(1)	551	[9]
Isoprène	34,3	8,0	32,8	1,5	30	o.s.–*568*g*, 169		[10]
Pentane n. [ène	36,15	6,1	33,6	2,55	35	—	(2)	[11]
Triméthyléthyl-	37,1	5,2	35,2	1,8	32	25 : 2,3	*542	[12]
Diméthylallène	40,8	1,7	38,0	2,8	45	(3)	o. s.	[13]
Cyclopentane [as.	49,3	7,0	40,0	2,3	62	—	—	[14]
Diisopropyle	58,0	15,7	41,5	0,8	80	—	—	[15]
Diallyle	60,1	17,8	41,8	0,5	85	(4)	—	[16]

(1) Mixtion : 23 : — 2,3; 7 : — 1,2; 10 : — 1,5. — (2) Bibl. *542, n° 1941; *558, n° 140. — (3) (4) Az. notablement perturbés par réaction chimique.

Z. — Isopropyléthylène (20,6; 21,7), f. [5 : 0,9]; hexane n. (68,8; 26,5), f. [52 : 4,8].

ÉTHOXYPROPANE (63,85)

Diallyle	60,1	3,75	<60,0	>0,1	>5	o.s.; 568*g*, n°142	[17]

Z. — Diisopropyle (58,0; 5,85), q.-az. [90 : 0,6]; hexane n. (68,8; 4,95), q.-az. [80 : 0,5]. — M. cyclopentane (72,0; 8,15), f. — Cyclopentane (49,3; 14,55), m.

DIMÉTHYLACÉTAL (64,3)

Hexane normal	68,8	4,5	64,0	0,3	70	50 : 1,5	s	[18]
M. cyclopentane	72,0	7,7	64,0	0,3	83	—	s	[19]

Z. — Benzène (80,15; 15,85), à près idéale [50 : 0,7].

OXYDE D'ISOPROPYLE (68,3)

Hexane normal	68,8	0,5	67,5	0,8	53	50 : 1,0	—	[20]
M. cyclopentane	72,0	3,7	<68,0	>0,3	>80	—	—	[21]

Z. — Benzène (80,15; 11,85), l. n. [50 : — 0,2].

ÉTHYLAL (FORMAL ÉTHYLIQUE) (87,95)

Cyclohexane	80,75	7,2	80,1	0,65	17	20 : 0,8	(1)	[22]
Heptane norm.	98,4	10,45	87,8	0,15	96	50 : 2,0	(2)	[23]

Z. — M. cyclohexane (101,15; 13,2), t. f. [90 : 0,7] (3). — Hexane n (68,8; 19,15), m. [10 : 1,0] (4). — Benzène (80,15; 7,8), l. [50 : 0,9] (5).

(1) *Ann. Chim.* (l. c.), n° 279 — (2) *C. R.*, 223 (1946, II), p. 286, n° 37. — (3) (4) *A. C.*, p. 175. — (5) *C. R.* (l. c.), n° 38; *A. C.*, p. 175.

Oxyde de propyle (90,1)

Z. — Cyclohexane (80,75; 9,35), m. [5 : 0,2]; heptane n. (98,4; 8,3), m. [90 : 0,3] (*Ann. Ch.*, p. 177); M. cyclohexane (101,15; 11,05), m. [95 : 0,2]. - Cyclohexène (82,75; 7,35), l. [5 : 0,1]; diisobutyle (109,4; 19,3), l. [95 : 0,3]. - Benzène (80,15; 9,95), l. n. [5 : — 0,1]. — Toluène (110,75; 20,65), t. l. n. [50 : — 1,0].

Dioxane (101,35)

M. cyclopentane	72,0	29,35	<71,5	>0,5	> 5	*Ann. Ch.*, n° 219		[24]
Cyclohexène	82,75	18,6	<81,8	>0,95	>20	—	—	[25]
Heptane norm.	98,4	2,95	91,85	6,55	44	*Ann. Ch.*	n° 220	[26]
M. cyclohexane	101,15	0,2	93,5	7,65	>45	»	n° 221	[27]
Diisobutyle	109,4	8,05	97,0	4,35	65	»	n° 222	[28]
Octane normal	125,75	24,4	<100,5	>0,85	- -	»	n° 223	[29]

Z. — Toluène (110,75; 9,4), m. [88 : 0,3 ∽] (*Ann. Ch.*, p. 172). Suivant De Mol [202*c*] ('38) il y aurait az. à 101°8 (!) à 80 %. — Benzène (80,15; 21,2), t. l. n. [21 : — 0,4] (*Ann. Ch.*, p. 172). Suivant De Mol [202*c*], il y aurait az. à 82°,4 (!), à 12 ∽ %. (Ce travail, fait à l'Institut Meurice-Chimie, vaut *moins que rien*.)

Acétal (éthylique) (103,55)

Heptane norm.	98,4	5,15	97,75	0,65	28	(1)	(2)	[30]
M. cyclohexane	101,15	2,4	99,65	1,5	40	(3)	o.s.(4)	[31]
Diisobutyle	109,4	5,85	103,0	0,55	75	80 : 1,0	568*g*	[32]

(1) Mixt. : 20 : 1,1; 30 : 1,3; 50 : 1,4. — (2) Bibl. *542, n° 1944 ('18); *569, n° 33; *C. R.*, 223 (1946, II), p. 286, n° 59. — (3) 40 : 1,2; 50 : 1,3. — (4) Bibl. 569, n° 36; *C. R.* (*l. c.*), n° 60.

Z. - Cyclohexane (80,75; 22,8), m. 5 : 0,3]; cyclohexène (82,75; 20,8), m.; octane n. (125,75; 22,2) m. [95 : 0,4] — Toluène (110,75; 7,2), l. [90 : — 0,1]. — Benzène (80,15; 23,4), ∽ idéale.

Oxyde d'isobutyle (122,3)

Di M.cyclo-1.3 hex-	120,7	1,6	120,0	0,7	28	∽	o. s.	[33]
Octane n. [ane	125,75	3,45	122,0	0,3	10	90 : 0,5	o. s.	[34]

Pour ces deux azéotropes, les données sont approximatives.

Z. — Méthylcyclohexane (101,15; 21,15), l. - Toluène (110,75; 11,55), l. n. [5 : — 0,2]. — Éthylbenzène (136,15; 13,85), ∽ idéale.

Paraldéhyde (124,35)

Z. — Toluène (110,75; 13,6), t. l. [25 : 0,1] (Bibl. 542, n° 893). - Éthylbenzène (136,15; 11,8), ∽ idéale [90 : — 0,1]; paraxylène (138,45; 14,1), ∽ - id. [90 : 0,0] (568*g*, n° 341).

Oxyde de butyle (142,4)

Orthoxylène	144,3	1,9	<142,0	>0,4	>78	50 : -0,8	—	[35]

Z. — Pinène-α (155,8; 13,4), positive. — Éthylbenzène (136,15; 6,25), l. [5 : — 0,2]. — Cumène (152,8; 10,4), ∽ idéale.

Orthoformiate d'éthyle (145,75)

Cet « ester » est à considérer, au point de vue azéotropique, plutôt comme un « oxyde ».

Phényléthylène	145,8	0,05	<145,0	>0,75	>55	—	—	[36]

Z. — Métaxylène (139,2; 6,55), m. [23 : 0,3 ∽] (*Ann. Ch.*, p. 181); cumène (152,8; 7,05), m.; pinène-β (163,8; 18,05), m. — Propylbenzène (159,3; 13,55), l. [50 : 0,5]; camphène (159,6; 13,85), l.

Anisole (153,85)

Isopropylbenzène	152,8	1,05	<152,0	>0,8	>30	—	—	[37]
Pinène-α	155,8	1,95	150,45	3,4	56	50 : 3,8	(1)	[38]
Camphène	159,6	5,75	151,85	2,0	63	F	(2)	[39]
Diisoamyle	160,1	6,25	153,2	0,65	66	90 : 2,0	—	[40]
Pinène-β	163,8	9,95	152,3	1,55	74	75 : 3,3	—	[41]

(1) Bibl. 542, n° 1945 ('18). — (2) 542, n° 1946; 569, n° 26 ('26).

Z. — Terpinène-α (173,4; 19,55), q.-az. p. [90 : 1,4]. — Orthoxylène (144,3; 9,55), m. [37 : 1,0]; mésitylène (164,6; 10,75), m. [90 : 0,5]. — Métaxylène (139,2; 14,65), l. [37 : 1,0] (*Ann. Ch.*, p. 121).

Oxyde de méthyle et de benzyle (167,8)

(Benzylméthyléther)

Camphène	159,6	8,2	158,0	1,6	<30	F	—	[42]
Pinène-β	163,8	4,2	161,2	2,6	35	50 : 3,5	—	[43]
Mésitylène	164,6	3,2	<163,5	>1,1	>15	15 : 0,7	—	[44]
Terpinène-α	173,4	5,6	166,4	1,4	65	—	—	[45]

Phénétole (170,45)

Pseudocumène	168,2	2,25	168,15	0,05	<10	50 : 1,0	568*g*	[46]
Terpinène-α	173,4	2,95	170,0	0,45	86	—	[n° 46	[47]

Z. — Pinène-β (163,8; 6,65), f. [10 : 1,6]; mésitylène (164,6; 5,85), f. [30 : 0,8) (Bibl. 550 n° 92); dipentène (177,7; 7,25) f. [90 : 1,5]. — Camphène (159,6; 10,85), m.; paracymène (176,7; 6,25) m. [90 : 0,3]; terpinène-γ (183,–; 12,55), m. [95 : 0,8]. — Pinène-α (155,8; 14,65), l. [5 : 1,2]; P. benzène (159,3; 11,15). l — Indène (182,6; 12,15), ∽ idéale.

Oxyde d'isoamyle (173,2)

Terpinène-α	173,4	0,2	172,0	1,3	50	—	—	[48]

Z. — Dipentène (177,7; 4,5). f. [90 : 0,4?]. — Terpinène-γ (183,–; 9,8), m. — Pinène-β (163,8; 9,4), l.; indène (182,6; 9,4), l. — Mésitylène (164,6; 8,6), ∽ idéale [10 : — 0,1]; pseudocumène (168,2; 5,0), paracymène (176,7; 3,5), ∽ idéale [90 : 0,2].

CINÉOLE (176,35)

Paracymène	176,7	0,35	176,2	0,15	55	50 : 0,5	∽ ?	[49]

Sous 10 *mm.*, p. éb. pour 3 titres; zéotr. Brauer [105, p. 157] ('29).

Z. — Indène (182,6; 6,25), m. — Butylbenzène (183,1; 6,75), l. [95 : 0,1 ∽]. — Pseudocumène (168,2; 8,75), t. l. — Terpinène-α (173,4; 2,95), ∽ idéale; terpinène-γ (183 –; 6 65), ∽ idéale. — Dipentène (177,7; 1,35), t. l. n. [80 : 0,2; 65 : 0,0; 40 . — 0 1; 48 : — 0,2] (Bibl. *542, n° 1952; *549, n° 107).

OXYDE DE MÉTHYLE ET DE PARACRÉSYLE (177,05)

(Paracrésolméthyléther)

Z. — Paracymène (176,7; 0,35), z. [50 : 0,5 ∽]. — Pseudocumène (168,2; 8,85), idéale [10 : 0,2] (Bibl. 561, n° 191); indène (182,6; 5,45), id. [90 : 0,0] (561, n° 189); B. benz. (183,1; 6,05), id. (568*g*, 248). — Terpinène-α (173,4; 3,65), l. n.; terpinolène (184 6; 7 55), t. l. n.

OXYDE D'ÉTHYLE ET DE BENZYLE (185,0)

(Benzyléthyléther)

Z. — Paracymène (176,7; 8,3), m.; dipentène (177,7; 7,3 , m. [10 : 0,2]. — Indène (182,6; 2,4), l.

DIÉTHYLDIGLYCOL (186,0)

Z. — Dipentène (177,7; 8,3), m. — Indène (182,5; 3,5), l.

OXYDE D'AMYLE n. (187,5)

Z. — Dipentène (177,7; 9,8), m. [10 : 0,2]; butylbenzène (183,1; 4,4), m. [10 : 0,1]. — Indène (182,6; 4,9), l.

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'ISOBORNYLE (192,4)

Z. — Terpinolène (184,6; 7,8), m. — Butylbenzène (183,1; 9,3), l.

OXYDE D'ÉTHYLE ET DE BORNYLE (204,9)

Z. — Triéthylbenzène s. (215,5; 10,6), l. — Naphtalène (218,0; 13,1), ∽ l.

VÉRATROL (206,8)

Z. — Triéthylbenzène s. (215,5; 8,7), l. [95 : 0,1]; naphtalène (218,0; 11,2), l.

OXYDE DE MÉTHYLE ET DE TERPÉNYLE α (216,2)

(Éther méthylique du terpinéol-α)

Z. — Triéthylbenzène s. (215,5; 0,7), m. (?) — Naphtalène (218,0; 1,8), z. p. (Bibl. 542, n° 1953).

ANÉTHOLE (235,7)

Z. — β-Méthylnaphtalène (241,15; 5,45), m. (*Ann. Ch., l. c.* p. 183); α-méthylnaphtalène (244,6; 8,9), m. — Naphtalène (218,0; 17,7), l.

SAFROLE (235,9)

Z. — β-Méthylnaphtalène (241,15; 5,25), m. (*Ann. Ch., l, c.*, p. 183); α-méthylnaphtalène (244,6; 8,7), m. [90 : — 0,1] (Bibl. 560, n° 246*b*). — Naphtalène (218,0; 17,9), l. (*568*g*, n° 246).

ISOSAFROLE (252,0)

Z. — α-Méthylnaphtalène (244,6; 7 4), m. [5 : — 0,1]; diphényle (256,1; 4,1), m. — β-Méthylnaphtalène (241,15; 11,85), l. (*Ann. Ch.*, p. 183); diphénylméthane (265,4; 13,4), l. (Bibl. 554, n° 155).

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'EUGÉNYLE (254,7)

(Eugénolméthyléther)

Diphényle	256,1	1,4	254,5	1,2	70	568*g*, n° 164	[50]

Z. — α-Méthylnaphtalène (244,6; 10,1), l. [5 : — 0,1] (*568*g*, n° 377). — Diphénylméthane (265 4; 10,7), t. l. (*554, n° 157).

OXYDE DE PHÉNYLE (259,0)

Z. — Diphényle (256,1; 2,9), m. (Bibl. 563, n° 164). — Diphénylméthane (265,4; 6,4), t. l. (*549, n° 116). — α-Méthylnaphtalène (244,6;14,4), id.

OXYDE DE MÉTHYLE ET D'ISOEUGÉNYLE (270,5)

(Isoeugénolméthyléther)

Z. — Diphénylméthane (265,4; 5,1), t. l. (*554, n° 156). — Diphényle (256,1; 14,4), idéale; acénaphtène (277,9; 7,4), id. (568*g*, n° 249).

OXYDE DE PHÉNYLE ET DE BENZYLE (286,5)

(Benzylphényléther)

Z. — Dibenzyle (284,5; 2,0), l. — Acénaphtène (277,9; 8,6), s idéale.

20 janvier 1948. Uccle-Bruxelles,
Laboratoire privé de l'auteur.

1673 Louvain. — Etabl Ceuterick, s. c., 66, rue Vital Decoster.

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901) ; la **troisième**, 30 volumes (1902-1921) ; la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Chaque année paraît un tome, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique.)

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	**200 francs belges**
France et colonies françaises (s'adresser au Centre du Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7e) . .	**500 francs franç.**
Suisse (s'adresser à la Librairie de l'Université, 6, rue Haldimand, Lausanne).	**28 francs suisses**
Canada (s'adresser aux Messageries France-Canada, 5466, avenue du Parc, Montréal 8)	**6 dollars 50**
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . .	**280 francs belges**

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **100,00**

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,
t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. **20,00**
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. **40,00**

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,
Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. **70,00**
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. **70,00**
Série C (sc. médicales) 1927 et 1928) fr. **100,00** — (1929 à 1933) fr. **40,00**
(1931 à 1936) fr. **20,00**
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. **20,00** — (1930) fr. **60,00**
(1931 à 1936) fr. **100,00**
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXI (1937 à 1947) fr. **70,00**
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. **70,00**
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. **100,00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,
t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . fr. **120,00**
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. **34,00**
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . fr. **160,00**
Le fascicule . . . . . fr. **28,00**
t. CXVII (1940 et 1946). t. CXVIII (1947) Le volume . . . fr. **200,00**
Le fascicule . . . . . fr. **60,00**

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.
t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. **20,00**
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. **20,00**
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. **30,00**

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougarinoff.** Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. **24,00**; autres pays, **30,00** fr.

II. — **V. Schaffers.** Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays fr. **30,00**.

IV. — **F. Kaisin** et **E. de Pierpont.** — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan horstexte (1939) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30.00**. (épuisé)

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **M. Schillings.** Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. **70,00** ; autres pays, fr. **90,00**.

III. — **P. Van Gehuchten.** La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30,00**.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I. — **A. Henry.** La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . fr. **20,00**

II. — **A. Henry.** Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . fr. **10,00**

III. — **A. Delpérée.** La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . fr. **60,00**